第一章　矢量，它的定义、符号和方法

§1.1　标量、矢量和张量

某些物理量用1个实数就能描述，例如质量、温度。另有一些物理量，要用一组实数才能完全描述，例如力，除了要说明它的大小外，还必须说明它的方向，所以要用3个实数才能表达；又例如物体的转动惯量，在一般情况下需要用6个实数才能完全描述。质量是标量（scalar），力是矢量(vector)，转动惯量则是二阶对称张量。本章着重讨论矢量。

我们可以从3个不同的角度来讨论矢量：从几何角度来看，矢量是一条有向线段，它具有大小和方向两个特征；从解析的角度来看，矢量是一组有顺序的数，这一数组不仅取决于它所描述的矢量本身，而且与所选择的坐标系有关；在代数领域中，矢量被定义为线性空间的元素，所谓线性空间，是指能满足某种特定代数运算规则的集合。

以上对矢量的讨论是在不同的层次上进行的，其中几何方法最为直观，例如在力学分析中画示力图，就是用有向线段来表示力矢量的。但是用几何方法只能进行较为简单的矢量运算。稍为复杂一点的矢量运算，只用几何方法是无法进行的，必须借助于坐标用解析方法来进行。用解析方法还可以将矢量概念加以推广，从维数(dimension）上可以推广到多维空间，从阶数（order or rank）上可以由矢量推广到张量，从而将矢量运算与张量运算统一起来。本教材即是按照这一体系来编

写的。至于代数领域里的矢量概念，不仅可以从数组扩大到集合，还可以从实数域扩大到复数域。不过，这些内容已超出本课程的范围了。

§1.2 几何方法

按照几何方法，即图形的方法，可以用一根有向线段 $a\ b$ 来表示一个矢量。线段的长短表示矢量的大小，箭头表示它的方向（图 1-1），a 叫做始点，b 叫做终点。vector 这个词，就是由拉丁文“运载”（vectum）引伸而来的，中文则形象化地称为矢量，或简称为矢；也称为向量，意为有方向的量。



图 1-1

矢量符号在印刷时常用黑体字母来表示，例如 $\boldsymbol{A}$，手写时矢量符号不用黑体，可在字母上方加一个箭头以资区别，例如$\vec{A}$。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小用 $|\boldsymbol{A}|$ 或 A 表示。

在本教材中，为了在课堂的黑板上书写和学生记笔记进一步提供方便，矢量一律用大写字母表示，标量用小写字母表示，因此手写时，矢量可以不加箭头也不会引起混淆，可以用 A 表示矢量，$|A|$ 表示其大小。书中有时也用$\overrightarrow{ab}$表示矢量，用 $\overline{ab}$或 $|ab|$ 表示其大小。

矢量的大小恒取正值，称为矢量的模（magnitude）。模为零的矢量称为零矢，故 $\boldsymbol{A}=0$ 与 $A=0$ 等价。零矢没有确定的方向。现在对矢量的相等、加减、矢量与标量的相乘运算分别定义如下：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行且方向相同，模相等，则不论它们的

位置如何，可认为此两矢量相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$（图 1-2）。

（2）矢量的加法规定如下：设 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，将 $\boldsymbol{B}$ 的始点 a 与 $\boldsymbol{A}$ 的终点相接，由 $\boldsymbol{A}$ 的始点 o 到 $\boldsymbol{B}$ 的终点 b 作一矢量即为 $\boldsymbol{C}$。显然 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（图 1-3）。此法则称为矢量相加的三角形法则，它可以推广到多个矢量相加。$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可以由 $\overrightarrow{ob}=\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{oc}$ 得到，ob 是平行四边形 $oabc$ 的对角线，此称平行四边形法则，它与三角形法则是等价的。



图 1-2

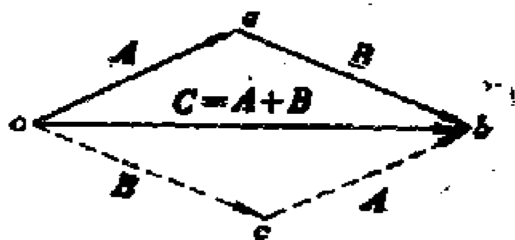


图 1-3

矢量是有向线段，但是能够用有向线段来描述的物理量并不一定都是矢量，这要取决于它是否符合矢量的加法法则（按照代数领域中的矢量定义，矢量的集合必须构成一个加法群）。设质点由 o 运动到 a，位移可以表示为有向线段 $\boldsymbol{A}$；又由 a 运动到 b，位移可以表示为有向线段 $\boldsymbol{B}$。两次运动的总位移可以表示为 $\boldsymbol{C}$，而 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，因此可以把位移看成矢量。又设在 o 点有两个力作用，一个是 $\overrightarrow{oa}$，一个是 $\overrightarrow{oc}$，由实验知合力为 $\overrightarrow{ob}$，而 $\overrightarrow{ob}=\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{oc}$，所以力也是矢量。物体转动的角位移虽也可以用有向线段来描述，但是不能用上述法则来求依次转动后的总的角位移，所以角位移不是矢量。

（3）若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 模相等，方向相反，可记为 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}$（图 1-4）。称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的负矢或 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的负矢。如此又可以定义矢量的减法：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+$

$(-\boldsymbol{B})$。

(4) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 与标量 m 相乘仍为一个矢量，记为 $m\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}m$。它的模为 $|m|A$，当 m 为正时，$m\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的方向一致；当 m 为负时，$m\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反。



图 1-4

矢量加法满足交换律和结合律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$。

矢量和标量相乘，满足交换律、结合律和分配律：
$m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}m$，$m(n\boldsymbol{A})=(mn)\boldsymbol{A}$，$(m+n)\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A}$，
$m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$。

§1.3 矢量乘法

(1) 标积或点积

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标积定义为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta$，其中的 θ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角。$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 是一个标量，故称为标积。这里的乘法运算用点"·"表示，故亦称点积。点积满足交换律与分配律，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$。现在对点积满足分配律进行证明如下：

作 $\overrightarrow{oa}=\boldsymbol{A}$，$\overrightarrow{ob}=\boldsymbol{B}$，$\overrightarrow{bc}=\boldsymbol{C}$，则 $\overrightarrow{oc}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$（图 1-5）。

过 o 点作平面 s 垂直于 $\overrightarrow{oa}$。过 b 点和 c 点分别作 $\overrightarrow{oa}$ 的平行线与 s 相交于 b' 和 c'，再作 $bc'' /\!/ b'c'$ 并取 c'' 点在 cc' 线上，则有：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\overline{oa}\cdot\overline{cc'},\qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\overline{oa}\cdot\overline{bb'},$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\overline{oa}\cdot\overline{cc''},\qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\overline{oa}\cdot(\overline{bb'}+\overline{cc''})。$$

因 $\overline{bb'}=\overline{c''c'}$, $\overline{bb'}+\overline{cc''}=\overline{cc'}$,

所以 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\overline{oa}\cdot\overline{cc'}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

物体受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用经过位移为 $\boldsymbol{S}$ 时，则力 $\boldsymbol{F}$ 作的功 w 便是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的点积：$w=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}$。

(2) 矢积或叉积

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的矢积定义为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}AB\sin\theta$，其中的 θ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角，$\boldsymbol{U}$ 是一个单位矢量（模等于1的矢量），它垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若无特别说明，则根据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{U}$ 构成右手系来规定 $\boldsymbol{U}$ 的方向（图 1-6），这里的乘法运算用"×"表示，故亦称叉积。$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的模 $AB\sin\theta$ 等于以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为邻边所构成的平行四边形的面积，而 $\boldsymbol{U}$ 是垂直于这个四边形的单位矢，称为它的法矢。因此 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 也可看作是一个面积矢量。

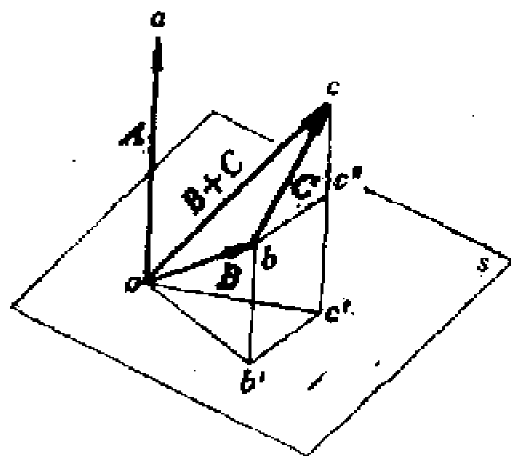


图 1-5

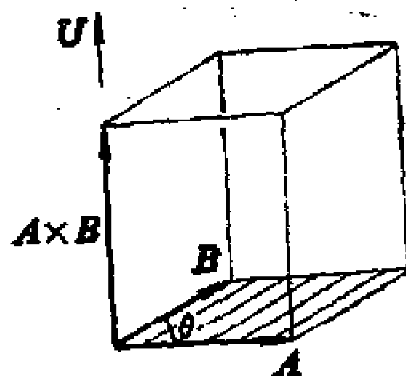


图 1-6

矢积不满足结合律，即 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 一般不成立；也不满足交换律，即 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 一般也不成立。但是有 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$。矢积满足分配律：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}。$$

这个性质很重要，但它的证明很繁，留待用张量体系的解析方法来完成它。

设有力 $\boldsymbol{F}$ 作用在 a 点，则这个 $\boldsymbol{F}$ 对 o 点的力矩为 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{oa}\times\boldsymbol{F}$（图 1-7）。

（3）并积或外积

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的并积（亦称外积）记作 $\boldsymbol{AB}$，称为并矢（dyad），它是一个二阶张量。关于二阶张量的定义以及并积的具体运算，将在第三章中作详细的介绍，现在暂时将并矢 $\boldsymbol{AB}$ 当作一种符号看待，对它作直观的几何解释比较困难，但是可以通过它与矢量的运算规则来看出它的一些性质。并矢可以和矢量相乘，规定这种乘法按结合律进行：

图 1-7

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}),\quad \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}, \qquad (1.1a,b)$$

$$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}),\quad \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}。\qquad (1.2a,b)$$

(1.1a,b) 式的右端为矢量，而 (1.2a,b) 的右端仍为并矢。

并积满足结合律和分配律，但不满足交换律，即

$$(m\boldsymbol{A})(n\boldsymbol{B})=mn(\boldsymbol{AB}),\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},$$

但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 一般不成立。

综上所述，矢量有三种乘法：标积、矢积和并积，它们都有同一个重要性质——满足分配律。这是在代数领域中对矢量定义的一个基本要求，也是解析方法赖以建立的基础。矢量的这三种乘法都有其物理背景，否则，矢量乘法的定义似乎带有随意性。但不能将 $AB\sin\theta$ 也定义成另一种标积，因为它不满足

分配律。

(4) 三矢相乘

两个矢量相乘的结果，可以是一个标量 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，可以是一个矢量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，也可以是一个二阶张量 $\boldsymbol{AB}$。若干个矢量相乘时，实际上是逐次把其中的两个矢量相乘，使矢量的数目逐次减少，最后也化成为两个矢量相乘。三个矢量相乘称为三矢积或三重积（有的书上又称之为三重积），有 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 三种形式。其中 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BC}$ 是一个与 $\boldsymbol{C}$ 平行的矢量；另外两个分别为标量和矢量，称为三矢标积和三矢矢积，都属于基本运算，必须熟练掌握。

由上述标积和矢积的定义容易推得，三矢标积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的绝对值，等于以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为棱边的平行六面体的体积（图1-8）。当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成右手系时，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 为正值，反之为负值。又容易验证 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$，据此可以引入一个新的符号 $[\boldsymbol{ABC}]$，定义为：

$$[\boldsymbol{ABC}]=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})。\qquad (1.3)$$

它是一个标量，具有循环性质

$$[\boldsymbol{ABC}]=[\boldsymbol{CAB}]=[\boldsymbol{BCA}],\qquad (1.4)$$

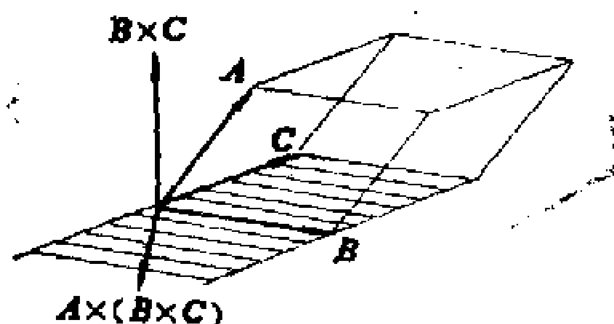


图 1-8

称此为循环公式，在矢量运算中应用很广。$[ABC]$ 还具有反对称性质

$$[\boldsymbol{ABC}]=-[\boldsymbol{CBA}]=-[\boldsymbol{BAC}]。\qquad(1.5)$$

容易证明，循环性质已包括在反对称性质之中。

可以证明，三矢矢积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 满足

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})。\qquad(1.6)$$

这称为分解公式，是矢量代数中一个重要的基本公式。因用几何方法来证明它很麻烦，故留待后面用解析方法来证明。这里先作一点解释：我们知道矢量 $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 指向 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 所在平面的法向（图 1-8），而矢量 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 与矢量 $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 互相垂直，所以必然处于 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 所在的平面内，从而必定可以分解为 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的线性组合。

例 1.1 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 为任意四个矢量，求证

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{BCD}]+\boldsymbol{C}[\boldsymbol{DAB}]=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{CDA}]+\boldsymbol{D}[\boldsymbol{ABC}]。\qquad(1.7)$$

解 考虑四矢相乘 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})$，令 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则利用分解公式（1.6）可得

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=\boldsymbol{C}[\boldsymbol{DAB}]-\boldsymbol{D}[\boldsymbol{ABC}]。$$

再令 $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}$，可得

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{CDA}]-\boldsymbol{A}[\boldsymbol{BCD}]。$$

令这两式右端相等，移项后即得（1.7）式。该式说明：在三维空间中，任意四个矢量必定是线性相关的，其中任何一个都可以化为另外三个不共面矢量的线性组合，例如：

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\frac{[\boldsymbol{DBC}]}{[\boldsymbol{ABC}]}+\boldsymbol{B}\frac{[\boldsymbol{ADC}]}{[\boldsymbol{ABC}]}+\boldsymbol{C}\frac{[\boldsymbol{ABD}]}{[\boldsymbol{ABC}]}。\tag{1.8}$$

这里还得强调指出，矢量不能用作分母，不能用作除数，上式中的分母都是标量。若 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=m$，$\boldsymbol{A}$ 和 m 已知，$\boldsymbol{B}$ 却是不确定的，不能从 $m/\boldsymbol{A}$ 来求出 $\boldsymbol{B}$。

§1.4 解析方法

以上介绍了几何方法。与之相应的符号称为黑体符号或 Gibbs 符号，也称为抽象符号。它的优点是直观，紧凑，运算简捷，而且不需要坐标系。抽象符号运算的最终形式是 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{AB}$ 和 $[\boldsymbol{ABC}]$，复杂形式最终必可化成这四种形式的组合。但是如果我们需要求出矢量运算的具体数量关系，用抽象符号和几何方法就不方便了。对于复杂的运算，用几何方法甚至可以说是无法进行的。抽象符号在某种意义上可以看成是一种算符，它提示人们进行某种运算，例如 $[\boldsymbol{ABC}]$ 是表示一个体积的值，但要具体算出它来，就应该借助于坐标系，用通常的标量数学运算来进行了。

(1) 坐标系和基 (basis)

最简单的坐标系是直角坐标系，即正交笛卡尔坐标系或简称笛卡尔坐标系 (Cartesian coordinate system)。传统的坐标符号是 X、Y、Z，我们现在改用 x_1、x_2、x_3，以便适应于规范化的张量运算法则。

沿着坐标轴的正方向取 3 个单位矢量 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{E}_3$，称为坐标系的基，有时也称基矢，但要注意它们并不满足矢量的严格定义；因为用黑体符号表示的矢量应该是与坐标系的选择无

关的，而 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{E}_3$ 却取决于所选用的坐标系。根据例 1.1 的结论，任何一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{E}_3$的线性组合，即

$$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{E}_1+a_2\boldsymbol{E}_2+a_3\boldsymbol{E}_3=\sum_{l=1}^{3}a_l\boldsymbol{E}_l, \tag{1.9}$$

式中的 a_l 称为 $\boldsymbol{A}$ 沿 $\boldsymbol{E}_l$ 方向的分量（component）。

空间一点 p 的位置，可以用矢量 $\overrightarrow{Op}$ 来描述（图1-9），$R(p)=\overrightarrow{Op}$ 称为 p 点的矢径（radius），它与 p 点坐标 x_s 的关系是

$$R(p)=\sum_{s=1}^{3}x_s\boldsymbol{E}_s。 \tag{1.10}$$

引入 Kronecker *delta* 符号 δ_{lm}，它的定义为：

$$\delta_{lm}=\delta_{ml}=\left\{\begin{array}{ll}1, & 当\ l=m\\ 0, & 当\ l\neq m\end{array}\right\},\quad l、m=1、2、3, \tag{1.11}$$

则坐标和基有以下性质：

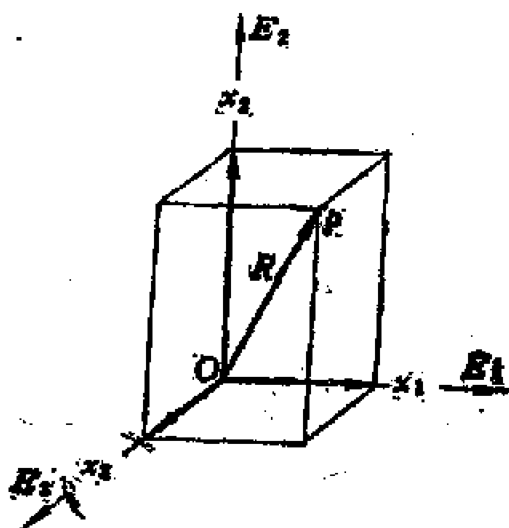


图 1-9

$$\frac{\partial x_l}{\partial x_m}=\delta_{lm}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{E}_l\cdot\boldsymbol{E}_m=\delta_{lm}。 \tag{1.13}$$

引入排列符号（逆序符号）e_{lmn}，它的定义为：

$$e_{lmn}=\begin{cases}+1, & \text{当}(l,m,n)\text{为}(1,2,3)\text{及其顺循环时}\\ -1, & \text{当}(l,m,n)\text{为}(1,2,3)\text{的逆循环时}\\ 0, & \text{当}l、m、n\text{中有重复数字时}\end{cases}, \tag{1.14}$$

则正交坐标系的基的性质可以表示为

$$\boldsymbol{E}_l\times\boldsymbol{E}_m=\sum_{n=1}^{3}e_{lmn}\boldsymbol{E}_n。 \tag{1.15}$$

它相当于9个公式：

$$\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_1=0,\ \boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_3,\ \boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_3=-\boldsymbol{E}_2,$$
$$\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{E}_1=-\boldsymbol{E}_3,\ \boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{E}_2=0,\ \boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_1,$$
$$\boldsymbol{E}_3\times\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{E}_3\times\boldsymbol{E}_2=-\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{E}_3\times\boldsymbol{E}_3=0。$$

（2）自由标，哑标，求和约定

式（1.15）中的指标 l、m 可以取1、2、3中的任何数，因此 $\boldsymbol{E}_l\times\boldsymbol{E}_m$ 代表了9个式子。l、m 各取特定的数，即代表一个特定的式子，所以称 l、m 为自由标，名标或识别标。式（1.15）中的指标 n 则不然，它成对地出现在等式右边，依次取作1、2、3并求和，它不能随意取特定的数，称它为求和标。

现在约定：在一个代数项中指标成对出现即表示求和，省去符号 $\sum\limits_{n=1}^{3}$，例如（1.10）式可写成 $\boldsymbol{R}=x_s\boldsymbol{E}_s$，（1.15）式可写成 $\boldsymbol{E}_l\times\boldsymbol{E}_m=e_{lmn}\boldsymbol{E}_n$。

规范化的张量体系要求算式各个代数项中出现的自由标都

彼此相同，例如 $a_l b_m + c_{ml} = d_{lm}$；而求和标可以只出现在某几个代数项中，例如（1.15）式中的 n 只出现在右端。求和标所用的字符可以随意改变，例如可以写成 $x_s \boldsymbol{E}_s = x_p \boldsymbol{E}_p$，对求和标而言，重要的是规定它的求和范围，而不是采用什么字符，因此求和标又称为哑标。

哑标求和约定给计算带来了极大的方便，但是这时要注意，若公式中出现了成对的指标但又不表示求和，那就必须特别注明。虽可以选任意的字符作哑标，但不可与自由标重复。在同一个代数项中出现两对或两对以上哑标时，它们也不可重复。例如 $\left(\sum_{s=1}^{3} x_s y_s\right)\left(\sum_{s=1}^{3} a_s b_s\right)$ 只可以写成 $x_s y_s a_k b_k$，不可以写成 $x_s y_s a_s b_s$。如果写成了后者，该怎样求和就不清楚了。在乘法计算中，对于带哑标的量，完全可以像对待普通的代数量一样使用交换律和结合律，例如 $a_l(b_s c_s) = (b_s a_l) c_s$。这相当于同时使用了分配律，因为 $a_l(b_s c_s) = a_l(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)$，而 $(b_s a_l) c_s = (b_1 a_l) c_1 + (b_2 a_l) c_2 + (b_3 a_l) c_3$。因此，应用哑标求和约定，不仅是省略了符号 $\sum_{s=1}^{n}$，而且括号也不再有必要了，还可以得心应手地使用交换律和结合律，给计算带来了极大的方便。我们再一次看到，这又是建立在分配律的基础上的一个运算法则。

（3）矢量代数

矢量 $\boldsymbol{A}$ 可写成 $\boldsymbol{A} = a_1 \boldsymbol{E}_1 + a_2 \boldsymbol{E}_2 + a_3 \boldsymbol{E}_3 = a_s \boldsymbol{E}_s$，式中的 a_1、a_2 和 a_3 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个分量。$\boldsymbol{A}$ 沿任一个坐标轴 x_k 的投影是 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E}_k$，在笛卡尔坐标中，矢量的投影与分量相等。现在我们对此作出证明，并以此作为使用哑标求和约定的例子：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_k=a_s\boldsymbol{E}_s\cdot\boldsymbol{E}_k=a_s\delta_{sk}=a_1\delta_{1k}+a_2\delta_{2k}+a_3\delta_{3k}。$$

上式右端的 δ_{1k}、δ_{2k} 和 δ_{3k} 中，只有一个为 1，另外两个为0。哪一个为 1，要视 k 为何数而定，即

$$a_s\delta_{sk}=\left\{\begin{array}{ll}a_1, & 当\ k=1\\ a_2, & 当\ k=2\\ a_3, & 当\ k=3\end{array}\right\},$$

于是

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_k=a_s\delta_{sk}=a_k。\tag{1.16}$$

它说明，矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿 $\boldsymbol{E}_k$ 的投影就等于它沿 $\boldsymbol{E}_k$ 的分量 a_k。

上式给出了一个运算规则，δ_{sk} 与 a_s 相乘，其结果是将a_s的指标 s 改换成 k 。

现在按照哑标求和约定进行两个矢量的加、减、点乘、叉乘、并乘计算：

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=a_s\boldsymbol{E}_s\pm b_k\boldsymbol{E}_k=(a_t\pm b_t)\boldsymbol{E}_t,\tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_ib_j\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{E}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i,\tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=a_ib_j\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{E}_j=e_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{E}_k,\tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{AB}=a_ib_j\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j。\tag{1.20}$$

现在我们可以用黑体符号 $\boldsymbol{A}$ 表示一个矢量，也可以用指标符号 $a_i(i=1、2、3)$ 表示一个矢量，或仅仅写 a_i，i 泛指 1、2、3；a_i 代表一个数组。当 i 取具体数时，a_i 才表示矢量的某个分量。用指标符号表达的算式，称为指标式。例如：表示叉乘 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的指标式是 $c_k=e_{ijk}a_ib_j$，当 a_i、b_j 已知时，据此即可求出具体的矢量 c_k。c_k 的 k 是自由标，它可以是 1、2、3 中的任何数，所以上述指标式代表了三个算式。a_i 和 b_j 的指标是哑标，在计算中必须遍取数值 1、2、3。因此，每一个算式又是在进行数组的运算。

习　题　1

1.1 设正六边形的诸顶点依次是 a、b、c、d、e、f，用几何方法计算矢量：

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{ae}+\overrightarrow{af}。$$

1.2 说明下列各式的几何意义（$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均不为零矢）：
$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$，$[\boldsymbol{ABC}]=0$，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0$。

1.3 有一根轴 ac，沿 $\overrightarrow{ac}$ 的单位矢量记作 $\boldsymbol{N}$，有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于 e 点，e 点与 ac 轴的距离是 $\overline{be}$，$\boldsymbol{F}$ 在与 ac 轴相垂直的平面上的投影是 $\overrightarrow{ef}$（图 1-10）。定义 $m=(\overrightarrow{ae}\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{N}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 对 ac 轴的力矩，求证 $m=|\overrightarrow{be}\times\overrightarrow{ef}|$。

（提示：$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{N}=\overrightarrow{ef}\times\boldsymbol{N}$，$\overrightarrow{ae}=\overrightarrow{ae}\cdot\boldsymbol{NN}+\overrightarrow{be}$）。

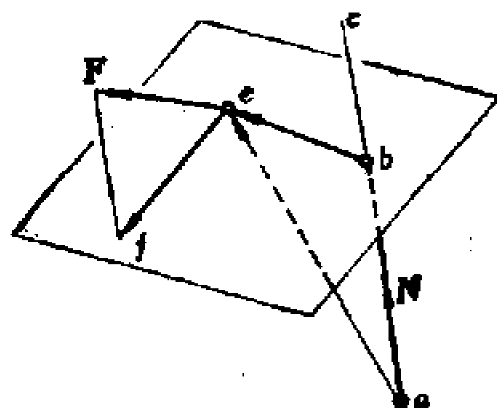


图 1-10

1.4 按哑标求和约定展开下列各式，求和范围从 1 到 3。

a) $a_{im}b_m$，　　b) $a_{ij}b_{jk}$，　　c) $a_{ij}b_{ik}$，

d) a_{ii}　　e) $a_{ij}x_ix_j$，　　f) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j$。

1.5 求证 (a) $a_{ij}b_ib_j=\dfrac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})b_ib_j$，

(b) $e_{ijk}a_{ij}=\dfrac{1}{2}e_{ijk}(a_{ij}-a_{ji})$。

1.6 设 $h=a_{ij}x_ix_j$（式中 a_{ij} 为一组常数），求 $\frac{\partial h}{\partial x_l}$ 和 $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$。

（提示：首先要改变哑标，使它不与偏导数中的自由标重复。）

第二章　矩阵和指标算式

§2.1　矩　　阵

在上一章中已经介绍了矢量的指标符号，即矢量可用数组来表示，矢量运算归结为数组的运算，并按哑标求和约定，用指标符号来进行。在这一章中我们要用矩阵来进行矢量运算，并介绍指标算式与矩阵运算式之间的关系。为了照顾不熟悉矩阵数学的读者，我们首先要介绍一些矩阵运算的基本内容，有的只介绍结论，不作证明。

（1）矩阵、方阵、单行阵和单列阵

$m\times n$ 个量 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 排列成 m 行、n 列的表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 $m\times n$ 矩阵，称 a_{ij} 为它的元素，指标 i、j 表示它位于第 i 行第 j 列，称 a 为核，i 为行标，j 为列标。

行数与列数 n 相同的矩阵又称为 n 阶方阵。只有 1 行的矩阵称为单行阵，记作

$$A_r=(a_1\quad\cdots\quad a_n),$$

只有 1 列的矩阵称为单列阵，记作

$$A_c=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}。$$

(2) 矩阵相加减，矩阵与数相乘

如果两个矩阵的行数相同，列数也相同，则称他们为同型矩阵，只有同型矩阵才可以相加减，矩阵相加是指各对应位置上的元素相加，$C=A\pm B$ 即 $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$。矩阵相加运算满足交换律和结合律，$A+B=B+A$，$(A+B)+C=A+(B+C)$。

两个矩阵相等是指它们为同型矩阵，且对应位置上的元素相等，$A=B$ 即表示 $a_{ij}=b_{ij}$。

所有的元素全都等于零的矩阵叫做零矩阵，记作
$A=0$，即$a_{ij}=0$。

矩阵与数相乘即每一个元素都乘这个数，$A=kB$，即
$a_{ij}=kb_{ij}$。

(3) 矩阵相乘

矩阵相乘有左乘和右乘之分，AB 表示 A 右边乘以 B 或B 左边乘以A，前提是左矩阵A的列数与右矩阵B的行数相同。设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，则乘积 $C=AB$是一个 $m\times p$ 矩阵，可表示为

$$\underset{m\times p}{C}=\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times p}{B},$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix},$$

C 矩阵中第 i 行第j列的元素 c_{ij} 由A的第 i 行与B的第j列的诸元素依次序对应相乘后再将积相加而得，即

$$c_{ij}=(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \cdots\ \ a_{in})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=a_{is}b_{sj}。$$

只有 A 与 B 为同阶方阵时才同时存在 AB 和 BA 两种乘积，而且一般说来二者不相等，$AB=BA$ 一般不成立，所以矩阵相乘运算不满足交换律。但它满足结合律和分配律：

$$(AB)C=A(BC),\quad A(B+C)=AB+AC。$$

因为乘法运算比较复杂，下面再用几个简单的例子来加以具体说明：

$$(a_1\quad a_2)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2;$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}(b_1\quad b_2)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\\a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix};$$

$$(a_1\quad a_2)\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=(a_1b_{11}+a_2b_{21}\quad a_1b_{12}+a_2b_{22});$$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_1+a_{12}b_2\\a_{21}b_1+a_{22}b_2\end{pmatrix}。$$

矩阵相乘有一些特别的地方要注意，若两矩阵相乘得到零矩阵，$AB=0$，可以是 $A\neq0$，$B\neq0$，例如

$$(3\quad 4)\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=12-12=0。$$

给定矩阵 A 和 C，不能由 $AB=C$ 确定 B；B 不仅可能不是唯一的，而且可能不存在。

(4) 单位阵、逆阵

以 δ_{ij} 为元素的方阵，它对角线上的元素为1，其余的元

素均为0，叫做单位阵，记作

$$E=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}。$$

任何一个矩阵与E相乘后仍等于它自已，即

$$AE=A,\ EB=B。$$

方阵与行列式是两个不同的概念，前者是由n^2个数排成的表，后者则是这n^2个数的一种运算，其结果仅为一个数。由方阵A可以生成一个行列式，记作$\det A$。若$\det A\neq 0$，称方阵A为满秩方阵。由线性代数可以证明，对于满秩方阵A，必存在另一满秩方阵B，满足$AB=BA=E$，我们称A与B互为逆方阵，记作$A=B^{-1}$或$B=A^{-1}$。显然$(A^{-1})^{-1}=A$。逆方阵是唯一的。

（5）矩阵的转置

将一个矩阵中的行改为列，列改为行而重新排列，称为矩阵的转置。由A转置成B，称A与B互为转置阵，记作$A=B^{\mathrm{T}}$或$B=A^{\mathrm{T}}$，此时A中第i行的元素与B中第i列的元素对应相等，即$a_{ij}=b_{ji}$。例如：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$B=A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}。$$

在转置阵A^{T}中，元素a_{ij}的第一个指标i改为列标，第二个指标改为行标，据此我们约定下列符号规则：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots \\ a_{12} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}。$$

单列阵转置后为单行阵，即 $A_c^{\mathrm{T}}=A_r$，$A_r^{\mathrm{T}}=A_c$。

关于矩阵的转置有下列关系：

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A,\ (ABC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}。$$

§2.2 指标算式

矩阵相乘是通过诸元素相乘、求和来进行的，这种运算也可以用带指标(自由标和哑标)的元素的计算式（即指标算式）来表达，现以二阶矩阵为例来说明矩阵乘法与指标算式二者的对应关系。

$(a_1\ \ a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=m$ 对应于 $a_s b_s=m$；

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}(b_1\ \ b_2)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 对应于 $a_i b_j=c_{ij}$；

$(a_1\ \ a_2)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=(c_1\ \ c_2)$ 对应于 $a_s b_{si}=c_i$；

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 对应于 $a_{is} b_s=c_i$；

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 对应于 $a_{is} b_{sj}=c_{ij}$。

由以上各式容易推论出，对应于矩阵乘法 $ABC=D$ 的指标算式为：

$$\underset{\text{哑}}{a_{ij}b_{jk}}c_{km}=d_{im}。 \qquad (2.1)$$

（j、k 下方分别标有"∨ 哑"。）

上式有很简单的规律，元素 $abcd$ 的位置排列与矩阵 $ABCD$ 相同，哑标 $jjkk$ 成对紧靠在一起，自由标在等式两端的排列相同，i 排在第一，m 排在最后。循此规律，我们可以很容易地将矩阵相乘写成指标算式。

矩阵相乘可以写成指标算式，反之，指标算式则不一定总能写成矩阵算式。因为指标算式多种多样，它所包括的运算不一定总能用矩阵运算来完成。但是在矢量运算中出现的指标算式，很多都可以改写成矩阵相乘，其中也有规律可循，我们仍通过例子来加以说明。

设有指标算式

$$a_{ij}b_{ik}=c_{kj}, \qquad (2.2)$$

它的指标排列不符合（2.1）式的规律，可以令 $b_{ik}=d_{ki}$ 并运用交换律将（2.2）式写成 $d_{ki}a_{ij}=c_{kj}$，则它对应于矩阵算式 $DA=C$ 即 $B^{T}A=C$。如果令 $a_{ij}=f_{ji}$，$c_{kj}=h_{jk}$，则（2.2）式又可写成 $f_{ji}b_{ik}=h_{jk}$，它对应于 $FB=H$ 即 $A^{T}B=C^{T}$。据此可以总结出如下规律：

$$a_{ij}b_{ik}=c_{kj} \quad 对应于 \quad A^{T}B=C^{T},$$

或

$$b_{ik}a_{ij}=c_{kj}, \quad 对应于 \quad B^{T}A=C。$$

因指标算式满足交换律，故 $A^{T}B=C^{T}$ 与 $B^{T}A=C$ 是等价的。

以上两组对应关系可以按下面的规律来得到：矩阵的位置排列与元素的位置相同，即 $ab=c$ 对应于 $AB=C$；$ba=c$ 对应于 $BA=C$。元素指标的排列与（2.1）式的规律相比较，若有一

些是“颠倒”了，则与这种元素相对应的矩阵应予转置。

例 2.1 将指标算式 $g_{ij}=h_{rs}l_{js}l_{ri}$ 写成矩阵算式，指标范围由 1 到 2。

解 首先应满足哑标关系，运用交换律将上式写成

$$g_{ij}=l_{ri}h_{rs}l_{js},$$

（r 哑，s 哑）

它对应于 $G=L^{T}HL^{T}$，故得到矩阵算式为：

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}。$$

例 2.2 将叉积公式 $c_k=e_{ijk}a_ib_j$ 写成矩阵算式。

解 带有 3 个指标的符号在一般情况下不能与矩阵相对应。但是在这个特殊例子中可以令 $e_{ijk}a_i=h_{jk}$，则上式成为 $c_k=h_{jk}b_j$，对应于 $C_c=H^{T}B_c$ 或 $C_r=B_rH$。由于 e_{ijk} 具有特殊的性质，因而 h_{jk} 有简单的形式

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_1 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

故叉积的矩阵算式为

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

或

$$(c_1 \quad c_2 \quad c_3)=(b_1 \quad b_2 \quad b_3)\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}。$$

§2.3 行列式的应用

记三阶行列式为

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{2.3}$$

可以用排列符号将它展开成

$$\det A=a_{1i}a_{2j}a_{3k}e_{ijk} \quad 或 \quad \det A=a_{i1}a_{j2}a_{k3}e_{ijk}。 \tag{2.4}$$

在(2.4)式中将1，2，3换成 l，m，n；如果(l，m，n)是(1，2，3)或其顺循环，结果仍是原行列式 $\det A$；如果(l,m,n)是(1，2，3)的逆循环，则结果为 $-\det A$，如果 l,m,n 中有相同的数字，则表示行列式中有两行（或两列）相同，结果为0。这些性质可以表达成

$$a_{li}a_{mj}a_{nk}e_{ijk}=a_{il}a_{jm}a_{kn}e_{ijk}=e_{lmn}\det A。 \tag{2.5}$$

下面来看看这些关系式的用途。

(1) 由(1.19)式知，叉乘计算式为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=e_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{E}_k。$$

由(2.4)式可得

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{E}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}。 \tag{2.6}$$

(2) 下面证明一个定理：方阵乘积的行列式，等于方阵的行列式的乘积。即证明若 $AB=C$，则 $\det A\cdot\det B=\det C$。取

$$\det A=a_{1l}a_{2m}a_{3n}e_{lmn},$$

则

$$\det A\cdot\det B=a_{1l}a_{2m}a_{3n}e_{lmn}\det B$$
$$=a_{1l}a_{2m}a_{3n}b_{li}b_{mj}b_{nk}e_{ijk}$$
$$=c_{1i}c_{2j}c_{3k}e_{ijk}$$
$$=\det C。$$

由以上定理可以推论，当且仅当两个方阵为满秩时，其乘积为满秩。

例 2.3 设 $a_{is}b_{sj}=\delta_{ij}$，求证 $b_{is}a_{sj}=\delta_{ij}$。

解 因为单位阵E为满秩，所以A和B亦为满秩。据线性代数知，满秩方阵必有逆阵。设B的逆阵为D，即

$$b_{is}d_{sj}=\delta_{ij}。$$

等式两端乘以 a_{pi}，可得

$$\delta_{ps}d_{sj}=\delta_{ij}a_{pi}。$$

由 δ_{ps} 乘积的换标性质，得到

$$d_{pj}=a_{pj},$$
$$b_{is}a_{sj}=\delta_{ij}。$$

§2.4 e_{ijk}与δ_{ij}的运算和E-D公式

用解析方法做矢量代数运算实际上是运用分配律将它分解成分量的运算和基的运算。分量的运算与一般标量的运算无异，在基的运算中，点乘出现δ_{ij}，叉乘出现e_{ijk}，这两个符号在矢量运算中有重要作用。现在我们进一步探讨e_{ijk}与δ_{ij}二者之间的关系。

取行列式

$$\det E=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=1,$$

再考虑一个普遍情况，

$$f=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}。\qquad (2.7)$$

在(2.7)式中，如果$(i,\ j,\ k)$和$(l,\ m,\ n)$都是(1，2，3)的顺循环，或者都是(1，2，3)的逆循环，那末

$$f=\det E=1。$$

如果(i,j,k)和(l,m,n)中有一个是(1,2,3)的顺循环，另一个是逆循环，那末

$$f=-\det E=-1。$$

如果(i,j,k)中或是(l,m,n)中有两个指标是相同的数字，那末

$$f=0。$$

由上面这些性质可以归纳成下列公式：

$$f=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}=e_{ijk}e_{lmn}。\qquad (2.8)$$

这就是e_{ijk}与δ_{ij}之间最普遍的关系。将式中的行列式展开，便得到

$$\begin{aligned}e_{ijk}e_{lmn}=&\delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km})\\ &+\delta_{im}(\delta_{jn}\delta_{kl}-\delta_{jl}\delta_{kn})\\ &+\delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})。\end{aligned}$$

令上式中的指标i与l相等作为哑标求和，可得

$$e_{sjk}e_{smn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}。\qquad (2.9)$$

此称E-D公式(e-δ公式)，用途很广，是张量代数中的一个基本公式。若再令(2.9)式中的j与m相等，作为哑标求

和，得到

$$e_{sjk}e_{sjn}=\delta_{jj}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{kj}=2\delta_{kn},\qquad(2.10)$$

最后还可以得到

$$e_{sjk}e_{sjk}=2\delta_{kk}=6。\qquad(2.11)$$

§2.5　三矢相乘

现在用指标符号来作一些基本计算。

（1）任意3个基的三矢标积为：

$$[\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{E}_k]=\boldsymbol{E}_l\cdot(\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{E}_k)$$
$$=\boldsymbol{E}_l\cdot\boldsymbol{E}_p e_{pmk}=\delta_{lp}e_{pmk}=e_{lmk}。\qquad(2.12)$$

这个公式有直观的几何解释：当(l,m,k)为$(1,2,3)$的顺循环时，$[\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{E}_k]=[\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3]=1$，为单位立方体的体积，当$(l,m,k)$为$(1,2,3)$的逆循环，即$\boldsymbol{E}_l,\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{E}_k$组成左手系时，则$[\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{E}_k]=-1$，若$l$、$m$、$k$中有重复数字，$\boldsymbol{E}_l$，$\boldsymbol{E}_m$，$\boldsymbol{E}_k$共面，$[\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{E}_k]=0$。由这些性质，也可以直接归纳出（2.12）式。

（2）任意矢量的三矢标积为

$$[\boldsymbol{ABC}]=a_ib_jc_k[\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{E}_k]=a_ib_jc_ke_{ijk}。\qquad(2.13)$$

由e_{ijk}的循环性质与反对称性质知，（2.13）式已将循环公式（1.4）和（1.5）包括在其中了。此式可用行列式计算：

$$[\boldsymbol{ABC}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}。$$

（3）任意矢量的三矢矢积为

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=a_i b_m c_n \boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{E}_l e_{lmn}$$
$$=a_i b_m c_n \boldsymbol{E}_s e_{sil} e_{lmn},$$

由 E-D 公式得 $e_{lsi}e_{lmn}=\delta_{sm}\delta_{in}-\delta_{sn}\delta_{im}$，代入上式得

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=a_i b_m c_n \boldsymbol{E}_s(\delta_{sm}\delta_{in}-\delta_{sn}\delta_{im})$$
$$=(a_i b_s c_i-a_i b_i c_s)\boldsymbol{E}_s$$
$$=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})。$$

这个公式在第一章已给出过，称为分解公式(1.6)，当时未予证明。

习　　题　2

2.1 按照例 2.1 和例 2.2 答案的格式，将下列指标算式写成矩阵算式，指标范围从 1 到 2。

(a) $c_l=a_{lm}b_m$，　　(b) $c_{jk}=a_{ij}b_{ik}$，

(c) $\mathrm{d}f_i=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j$，　　(d) $a=a_{ij}x_i x_j$。

2.2 展开 $a_i b_j c_k e_{ijk}$，指标范围从 1 到 3。

2.3 计算图 2-1 所示平行六面体的体积，其 4 个顶点的坐标是 $o(1,0,0)$，$a(5,0,0)$，$b(1,2,1)$ $c(-1,-1,2)$。

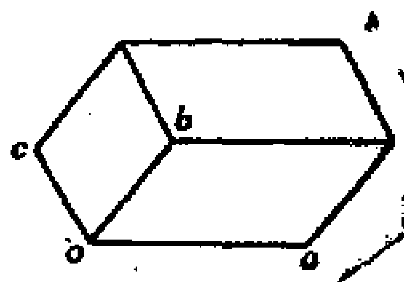


图 2-1

2.4 证明叉积公式 $c_k=e_{ijk}a_i b_j$ 可以写成矩阵算式：

$$(c_1\ \ c_2\ \ c_3)=(a_1\ \ a_2\ \ a_3)\begin{pmatrix}0 & -b_3 & b_2\\ b_3 & 0 & -b_1\\ -b_2 & b_1 & 0\end{pmatrix}。$$

2.5 用指标符号和 $E-D$ 公式直接证明下列各式，证明过程中不套用抽象符号的现成公式（三矢矢积的分解公式），也不利用前面题目的结果。

(a) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$,

(b) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=[\boldsymbol{ABD}]\boldsymbol{C}-[\boldsymbol{ABC}]\boldsymbol{D}$,

(c) $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{BCD}]+\boldsymbol{C}[\boldsymbol{DAB}]=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{CDA}]+\boldsymbol{D}[\boldsymbol{ABC}]$,

(d) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot[(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})]=[\boldsymbol{ABC}]^2$。

第三章　矢量和张量

§3.1　坐标系和坐标变换

矢量可以在规定的坐标系中用有序数组（矢量的分量）来表示，同一个矢量，在不同的坐标系中表示为不同的数组。现在要进一步研究这个问题，以便从解析的角度对矢量下定义，并将矢量概念扩大到张量。为此目的，先来讨论在不同的坐标系中各种量的变换关系。

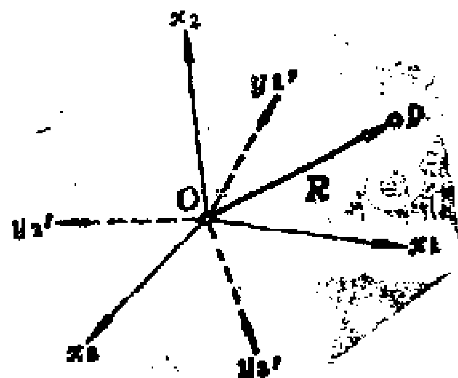


图　3-1

选择同一原点O建立两组直角坐标系，一组为$\{x_i\}$，一组为$\{y_{i'}\}$，相应的基分别为$\boldsymbol{E}_i$和$\boldsymbol{G}_{j'}$（图 3-1），称为参考标架（frame of reference）。$\{y_{i'}\}$中的量，采用带撇"ʹ"的指标，以示区别。两组坐标系的相互关系，可以用诸x_i轴和诸$y_{j'}$轴的 9 个方向余弦来描述，记作

$$l_{ij'}=\cos(x_i,\ y_{j'})=\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{G}_{j'},\qquad(3.1)$$

可以将它看作是矢量$\boldsymbol{E}_i$在$\boldsymbol{G}_{j'}$方向的投影。由矢量的投影等于其分量这一性质可以推论出：

$$\boldsymbol{E}_i=l_{ij'}\boldsymbol{G}_{j'}。\qquad(3.2)$$

设有任一点p，它在两组坐标系中的坐标分别为x_i和$y_{j'}$，p对O点的矢径可表示为$x_i\boldsymbol{E}_i=y_{j'}G_{j'}$。在等式两端都点乘以$\boldsymbol{E}_k$，得到$x_i\delta_{ik}=y_{j'}l_{kj'}$，即

$$x_k = l_{kj'} y_{j'}。\qquad (3.3)$$

这就是两组坐标之间的变换关系，而 $l_{kj'}$ 叫做由 $\{x_k\}$ 到 $\{y_{j'}\}$ 的坐标变换系数。

两组坐标系的命名是有互换性的。因此又可以有关系式：

$$l_{j'i} = \boldsymbol{G}_{j'} \cdot \boldsymbol{E}_i, \qquad (3.4)$$

$$\boldsymbol{G}_{j'} = l_{j'i} \boldsymbol{E}_i, \qquad (3.5)$$

$$y_{j'} = l_{j'i} x_i。\qquad (3.6)$$

将 (3.5) 式代入 (3.2) 式，得 $\boldsymbol{E}_i = l_{ij'} l_{j'k} \boldsymbol{E}_k$，两端点乘 $\boldsymbol{E}_m$，得：

$$l_{ij'} l_{j'm} = \delta_{im}, \qquad (3.7)$$

它说明由系数 $l_{ij'}$ 与 $l_{j'm}$ 所构成的矩阵是互逆的。但是从 (3.1) 式和 (3.4) 式可知，$l_{j'm} = l_{mj'}$，即这两个矩阵互为转置。因此我们只需要保留一套符号 $l_{ij'}$，减少不必要的多余符号 $l_{j'm}$，最后留下下列各式：

$$l_{ij'} = \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{G}_{j'},$$

$$x_i = l_{ij'} y_{j'},$$

$$y_{j'} = l_{ij'} x_i,$$

$$\boldsymbol{E}_i = l_{ij'} \boldsymbol{G}_{j'},$$

$$\boldsymbol{G}_{j'} = l_{ij'} \boldsymbol{E}_i,$$

$$l_{ij'} l_{mj'} = \delta_{im}。\qquad (3.8)$$

(3.8) 式说明，矩阵 $(l_{ij'})$ 与其转置阵互逆：

$$(l_{ij'})^{-1} = (l_{ij'})^T。$$

这样的矩阵称为正交矩阵，它必须满足关系：

$$\det(l_{ij'}) = \pm 1,$$

+1 对应于坐标系的旋转变换，−1 对应于反射变换。

(3.8) 式代表 6 个代数式，它们是对变换系数的约束，所

以 9 个变换系数仅有 3 个是独立的。

由（3.3）式和（3.6）式还可以得到关系式：

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_{j'}}=l_{ij'}, \qquad \frac{\partial y_{j'}}{\partial x_i}=l_{j'i}。 \tag{3.9}$$

它们可以作为坐标变换系数的更为普遍的定义（可用于曲线坐标系）。

例 3.1 取坐标轴x_i与立方体的 3 条边重合，先将它们绕x_1轴转动 45°，x_2的新位置成为 $y_{2'}$（图 3-2），然后绕 $y_{2'}$ 轴转动使 x_3 轴与立方体的对角线重合，此时 x_1 轴的新位置成为 $y_{1'}$，x_3 的新位置成为 $y_{3'}$，求 $\{x_i\}$ 与 $\{y_{j'}\}$ 两组坐标系的变换系数。

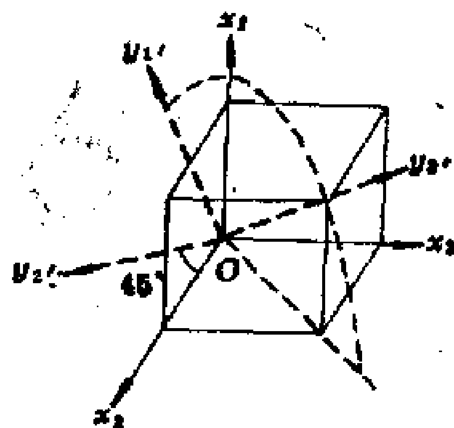


图 3-2

解 由几何关系很容易得出：

$$(l_{ij'})=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ l_{21'} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ l_{31'} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix},$$

其中仅有 $l_{21'}$ 与 $l_{31'}$ 一时不易判断。由（3.8）式得

$$l_{1j'}l_{2j'}=0, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}l_{21'}+\frac{1}{3}=0, \quad l_{21'}=-\sqrt{\frac{1}{6}},$$

$$l_{1j'}l_{3j'}=0, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}l_{31'}+\frac{1}{3}=0, \quad l_{31'}=-\sqrt{\frac{1}{6}}。$$

§3.2 矢量与张量

(1) 矢量，符号与定义

矢量有 3 种表示法：

$$\boldsymbol{A},\qquad a_i(i=1,2,3),\qquad a_i\boldsymbol{E}_i(=\boldsymbol{A})。$$

$\boldsymbol{A}$ 是抽象符号，它不依赖于坐标，表达的是一个不变量(invariant)，即不因坐标变换而变化的量。

矢量又可记成 (a_1,a_2,a_3)，或 $a_i(i=1,2,3)$，或仅仅记作 a_i，它表示一组具体的数，与坐标系有关。同一个矢量，在不同的坐标系中 a_i 取不同的值。a_i 称为指标符号，它的全体即代表矢量，i 取一个具体数时，a_i 表示矢量的一个分量。

以上两种符号由式 $\boldsymbol{A}=a_i\boldsymbol{E}_i$ 联系了起来，$a_i\boldsymbol{E}_i$ 称为不变性并矢符号，名称的含义如下：在另一参考标架 $\boldsymbol{G}_{j'}$ 中，也可以写成 $\boldsymbol{A}=a_{j'}\boldsymbol{G}_{j'}$，$(a_1,a_2,a_3)\neq(a_{1'},a_{2'},a_{3'})$，但是

$$a_i\boldsymbol{E}_i=a_{j'}\boldsymbol{G}_{j'}。\tag{3.10}$$

这就是说随着坐标变换，(a_1,a_2,a_3) 要变换成 $(a_{1'},a_{2'},a_{3'})$，二者不等，但是 $a_i\boldsymbol{E}_i$ 却是一个不变量。

用 $\boldsymbol{E}_k$ 点乘 (3.10) 式的两端，可得：

$$a_k=l_{kj'}a_{j'},\tag{3.11}$$

或用 $\boldsymbol{G}_{k'}$ 点乘 (3.10) 式两端，可得：

$$a_{k'}=l_{ik'}a_i。\tag{3.12}$$

可以用这两个式子中的任一个作为矢量的定义：与坐标系有关的有序数组，在坐标系 $\{x_k\}$ 中为 a_k；在 $\{y_{j'}\}$ 中为 $a_{j'}$；若满足关系式 (3.11)，则此数组代表一个矢量。这个定义虽然起源于几何的形的概念，但是它已摆脱了形的约束，可以从

数学逻辑上向前发展了。

（2）并矢，二阶张量

将上面对矢量的分析方法应用于并矢，并矢也有3种表示方法：

抽象符号$\boldsymbol{AB}$，指标符号$a_i b_j$和不变性并矢符号$a_i b_j \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_j$。

并矢有9个分量$a_i b_j$，在坐标变换时它们应满足关系：

$$a_i b_j \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_j = a_{p'} b_{q'} \boldsymbol{G}_{p'} \boldsymbol{G}_{q'}。 \qquad (3.13)$$

用$\boldsymbol{E}_k$和$\boldsymbol{E}_m$先后从右边去点乘等式的两边，得到：

$$a_i b_j \delta_{im} \delta_{jk} = a_{p'} b_{q'} l_{mp'} l_{kq'},$$

即

$$a_m b_k = l_{mp'} l_{kq'} a_{p'} b_{q'}。 \qquad (3.14)$$

这是作为并矢的$a_m b_k$在坐标变换时应该满足的变换关系，由此引伸，可以提出二阶张量的定义：由与坐标系有关的9个有顺序的数c_{ij}组成的数组，若当坐标变换时按照关系式

$$c_{ij} = l_{ip'} l_{jq'} c_{p'q'} \qquad (3.15)$$

进行变换，则c_{ij}的全体是一个二阶张量。每一个c_{ij}（i，j取具体值）是它的一个分量。显然，二阶张量的并矢符号满足关系式：

$$c_{ij} \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_j = c_{p'q'} \boldsymbol{G}_{p'} \boldsymbol{G}_{q'}。 \qquad (3.16)$$

它与（3.15）式等价。

现在我们从张量的角度来分析 Kronecker *delta* 符号δ_{im}。由（3.8）式可得

$$\delta_{im} = l_{ij'} l_{mj'} = l_{ij'} l_{mp'} \delta_{j'p'},$$

可见δ_{im}是一个二阶张量，它是直角坐标系的度量张量。

由（3.16）式有$\delta_{ij} \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_j = \delta_{p'q'} \boldsymbol{G}_{p'} \boldsymbol{G}_{q'}$，即

$$\boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{G}_{p'} \boldsymbol{G}_{p'}。$$

这是 δ_{ij} 的并矢符号。

并矢(dyad)是二阶张量，但是一个任意的二阶张量一般不能写成一个并矢。因为由二阶张量各分量所组成的方阵可以是满秩的，而由并矢的各分量所组成的方阵不可能是满秩阵。但是任何二阶张量都可以写成 3 个或 3 个以上并矢之和（写法不唯一），所以二阶张量又称为并矢式(dyadic)。

(3) 三阶张量

(3.11)式给出了矢量(一阶张量)的定义，(3.15)式给出了二阶张量的定义，由此引伸，可以给出三阶张量的定义：与坐标系有关的有序数组 a_{ijk} 若在坐标变换时满足关系式

$$a_{ijk}=l_{ip'}l_{jq'}l_{kr'}a_{p'q'r'}, \qquad (3.17)$$

则它们组成一个三阶张量。三阶张量的并矢符号为 $a_{ijk}\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{E}_k$，显然

$$a_{ijk}\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{E}_k=a_{p'q'r'}\boldsymbol{G}_{p'}\boldsymbol{G}_{q'}\boldsymbol{G}_{r'}, \qquad (3.18)$$

它与(3.17)式等价。

现在我们来讨论排列符号 e_{ijk}。由行列式计算的(2.5)式得

$$e_{ijk}\det(l_{ir'})=l_{ip'}l_{jq'}l_{kr'}e_{p'q'r'},$$

又由于 $\det(l_{ir'})=\pm 1$，故得：

$$\pm e_{ijk}=l_{ip'}l_{jq'}l_{kr'}e_{p'q'r'}。 \qquad (3.19)$$

如果规定在右手坐标系中 $\varepsilon_{ijk}=e_{ijk}$，在左手坐标系中 $\varepsilon_{ijk}=-e_{ijk}$，则 ε_{ijk} 就是一个三阶张量，叫做 Eddington 张量。

高阶张量的定义可以再由(3.17)式引伸，形式是显然的，这里就不再列出了。

§3.3 对称与反对称

如果张量 a_{ijkl} 的分量满足关系式：

$$a_{ijkl}=a_{jikl},$$

则称此张量关于第1、2指标为对称。如果关系式

$$a_{ijkl}=-a_{ijlk}$$

成立，则称此张量关于第3、4指标为反对称。例如

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}$$

为对称张量。而

$$e_{ijk}=-e_{jik}=e_{jki}$$

为（关于全部指标的）反对称张量。

二阶张量的对称与反对称性质最为典型，任何二阶张量均可唯一地分解成对称张量与反对称张量之和。令

$$a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}) \tag{3.20}$$

为 a_{ij} 的对称部分；

$$a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji}) \tag{3.21}$$

为 a_{ij} 的反对称部分；则 a_{ij} 为二者之和，

$$a_{ij}=a_{(ij)}+a_{[ij]}。 \tag{3.22}$$

二阶对称张量有9个分量，其中只有6个是独立的，因为 $a_{(ij)}=a_{(ji)}$。二阶反对称张量只有6个不为0的分量，因为当 $i=j$ 时，$a_{[ij]}=0$。这6个分量中只有3个是独立的，因为 $a_{[ij]}=-a_{[ji]}$。

二阶张量的反对称部分仅由3个独立分量决定，应能对应于一个矢量。令

$$b_k = a_{ij} e_{ijk}, \tag{3.23}$$

可称它为 a_{ij} 的反对称对偶矢量（dual vector）。由习题1.5(b)已经知道 $a_{ij}e_{ijk}=a_{[ij]}e_{ijk}$，所以 b_k 仅与 $a_{[ij]}$ 相对应，不难导出

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2} b_k e_{ijk}。 \tag{3.24}$$

由（3.23）和（3.24）式可以写出 b_k 与 $a_{[ij]}$ 的对应关系：

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{23}-a_{32} \\ a_{31}-a_{13} \\ a_{12}-a_{21} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_{[23]} \\ a_{[31]} \\ a_{[12]} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{[11]} & a_{[12]} & a_{[13]} \\ a_{[21]} & a_{[22]} & a_{[23]} \\ a_{[31]} & a_{[32]} & a_{[33]} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}。$$

§3.4　张量代数

张量代数运算的结果仍为张量，其中包括标量（0阶张量）和矢量（一阶张量）。这一性质可由满足坐标变换关系的张量定义来证明。大多数证明都很简单，现留给读者去完成，下面仅给出这些运算规则：

（1）加减法

只有同阶张量才能相加减，所得结果仍为同阶张量：

$$a_{ijk} + b_{ijk} = c_{ijk}。$$

（2）并乘或外乘

a_{ijk} 与 b_{lm} 并乘得到一新张量：

$$a_{ijk}b_{lm}=c_{ijklm},$$

其阶数为相乘的张量阶数之和。a_{ijk} 有 27 个分量，b_{lm} 有 9 个分量，而 c_{ijklm} 有 243 个分量，由 a_{ijk} 的全体与 b_{lm} 的全体相乘而得到。

并乘与次序有关，例如也可以规定

$$a_{ijk}b_{lm}=d_{lmijk},$$

或其他形式。d_{lmijk} 的 243 个分量包括了 c_{ijklm} 分量的全体，但是排列次序不同了，$d_{ijklm}\neq c_{ijklm}$。

（3）缩并（contraction）

a_{ijk} 与 δ_{ij} 相乘（i、j 为哑标）叫做对张量 a_{ijk} 作关于第 1、2 指标的缩并运算，

$$a_{ijk}\delta_{ij}=a_{iik}=b_k,$$

其结果为比 a_{ijk} 低二阶的张量。a_{ijk} 有 27 个分量，b_k 有3 个分量，仅由 a_{ijk} 中的 9 个分量分组相加而成。现在来证明b_k确为一阶张量，当坐标变换时，

$$\begin{aligned}a_{iik}&=a_{p'q'r'}l_{ip'}l_{iq'}l_{kr'}\\&=a_{p'q'r'}\delta_{p'q'}l_{kr'}\\&=a_{p'p'r'}l_{kr'},\end{aligned}$$

即

$$b_k=b_{r'}l_{kr'}。$$

因此 b_k 是一阶张量。

二阶张量 a_{ij} 的缩并 $a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 为一标量（零阶张量），叫做 a_{ij} 的迹（trace）。如果将 a_{ij} 写成方阵的形式，a_{ii}为此方阵对角线上元素的和。

（4）内乘

a_{ijk} 与 b_{km}（k 为哑标）的内乘可视为由并乘与缩并两种运算

所组成：

$$a_{ijk}b_{km}(=a_{ijk}b_{lm}\delta_{kl})=c_{ijm}。$$

c_{ijm} 的分量由 a_{ijk} 和 b_{km} 分量的全体按一定规律相乘后组合而成。

内乘必须规定是对哪一对指标进行的，例如还可以作

$$a_{ijk}b_{im}=d_{jkm}。$$

d_{jkm} 的 27 个分量与 c_{ijm} 的分量完全不同。

(5) 反对称对偶张量

a_{ijk} 与 e_{ijm} 相乘（i、j 为哑标）得到一个比 a_{ijk} 低一阶的新张量 b_{km}：

$$a_{ijk}e_{ijm}=b_{km},$$

叫做关于 a_{ijk} 中第 1、2 指标为反对称的对偶张量。b_{km} 的分量由 $a_{ijk}-a_{jik}$ 组成（i、j、m 互不相等），例如 $b_{k3}=a_{12k}-a_{21k}$。

现在可以从张量代数的角度来归纳前面两章的矢量运算了：最基本的运算是并乘 a_ib_j，即并矢 $\boldsymbol{AB}$。a_ib_j 的缩并，或 a_i 与 b_j 内乘 a_ib_i 为一个标量，即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$。$a_ib_j$ 的反对称对偶张量 $a_ib_je_{ijk}$，即 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。以上所述可列表对比如下：

张量代数		并矢符号	抽象符号
a_i与b_i相加	$a_i+b_i=c_i$	$(a_i+b_i)\boldsymbol{E}_i=c_i\boldsymbol{E}_i$	$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$
a_i与b_j并乘	$a_ib_j=d_{ij}$	$a_ib_j\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j=d_{ij}\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j$	$\boldsymbol{AB}=\widetilde{\boldsymbol{D}}$
a_i与b_i内乘	$a_ib_i=m$	$a_ib_j\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{E}_j=m$	$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=m$
a_ib_j的反对称对偶	$a_ib_je_{ijk}=c_k$	$a_ib_je_{ijk}\boldsymbol{E}_k=c_k\boldsymbol{E}_k$	$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=C$

指标式本身包含着分配律。若直接用 $a_ib_je_{ijk}=c_k$ 来定义叉积，则无须对它满足分配律这一点再作证明，此时需要证明的只是 c_k 确为矢量。

§3.5 商法则(quotient rule)

这法则在简单情况下较易说明。

如果 a_{ijk} 和 b_k 是张量，则乘积

$$a_{ijk}b_k=c_{ij} \qquad (3.25)$$

也是张量，而且容易求得。如果已知的是 b_k 和 c_{ij}，则不能由(3.25)式求得 a_{ijk}，即张量没有除法，没有商值。现在可以降低要求，提出另外一个命题：设 $a(ijk)b_k=c_{ij}$ 在一切笛卡尔坐标系中成立，b_k 是一个与 $a(ijk)$ 无关的任意张量，如果 c_{ij} 也是张量，则可以判断 $a(ijk)$ 也是张量。即是说，虽不能用(3.25)式来求 a_{ijk} 的值，但可以判定它的性质。这称为商法则，证明如下：

设在新坐标系 $\{y_{p'}\}$ 中，

$$a(p'q'r')b_{r'}=c_{p'q'}。 \qquad (3.26)$$

因为 $b_{r'}$ 和 $c_{p'q'}$ 都是张量，所以

$$c_{p'q'}=l_{ip'}l_{jq'}c_{ij}=l_{ip'}l_{jq'}a(ijk)b_{r'}l_{kr'},$$

代入(3.26)式，移项后得到

$$[a(p'q'r')-l_{ip'}l_{jq'}l_{kr'}a(ijk)]b_{r'}=0,$$

即

$$[a(p'q'1')-l_{ip'}l_{jq'}l_{k1'}a(ijk)]b_{1'}$$
$$+[a(p'q'2')-l_{ip'}l_{jq'}l_{k2'}a(ijk)]b_{2'}$$
$$+[a(p'q'3')-l_{ip'}l_{jq'}l_{k3'}a(ijk)]b_{3'}=0。$$

因为 $b_{r'}$ 是任意张量，可以令 $b_{1'}\neq 0$，而 $b_{2'}=b_{3'}=0$，于是得到当 $r'=1$ 时，

$$a(p'q'r')-l_{ip'}l_{jq'}l_{kr'}a(ijk)=0。 \qquad (3.27)$$

依次令 $b_{2'}\neq 0, b_{3'}\neq 0$，可以得到结论：当 $r'=2$ 和 $r'=3$时，

(3.27) 式成立，即 (3.27) 式在 p'、q'、r' 取 1 到 3 中的任何数时都成立，于是可以判断 $a(ijk)$ 为三阶张量。

商法则有各种不同的形式，下面再介绍两种。

设 $a(ij)b_{ij}=m$ 在一切笛卡尔坐标系中成立，b_{ij} 是任意张量，乘积 m 是标量（零阶张量），则 $a(ij)$ 必为张量。

设 $a(ij)b_ib_j=m$ 在一切笛卡尔坐标系中成立，b_k 是任意张量，乘积 m 是标量，则 $a(ij)+a(ji)$ 必为张量。

商法则又叫做张量识别定理。张量原来是由坐标变换关系来定义的，但在物理问题中出现某些量时，往往并不直接给出它们与坐标系的关系，而是给出它们与另一些张量之间的关系，这时用商法则来对这些量作判断就显得方便多了。

习　题　3

3.1 用 $\cos(x,x')$ 表示 $l_{11'}$, $\cos(x,y')$ 表示 $l_{12'}$, $\cdots\cos(z,z')$ 表示 $l_{33'}$，将指标式 $l_{is'}l_{js'}=\delta_{ij}$ 写成 6 个代数式。

3.2 对应于例 3.1（图 3-2）的坐标系 $\{x_i\}$ 和 $\{y_{i'}\}$，写出 p 点的 $y_{i'}$ 坐标值，已知 p 的 x_i 坐标值为 (3,2,−2)。

3.3 坐标系同上。已知一矢量为 $(a_{1'},a_{2'},a_{3'})=(3,2,-2)$，求它在 x_i 轴上的分量 $a_i(i=1,2,3)$。

3.4 坐标系 $\{x_i\}$ 先绕 x_3 轴逆时针转过 ϕ 角，使 x_1 轴变成 $y_{1'}$ 轴（图 3-3）；再绕 $y_{1'}$ 轴逆时针转过 θ 角，使 x_2 轴变成 $y_{2'}$ 轴，x_3 轴变成 $y_{3'}$ 轴，求坐标变换系数 $l_{ij'}$。

3.5 已知 a_i 和 b_j 为矢量，由坐标变换关系证明 $c_k=a_ib_je_{ijk}$ 为矢量。

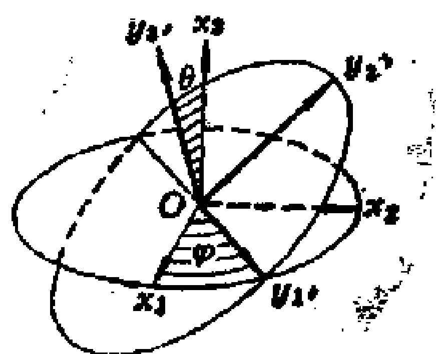


图 3-3

3.6 设 $b_k=a_{ij}e_{ijk}$，证明 $a_{[ij]}=\frac{1}{2}b_k e_{ijk}$。

3.7 证明下述商法则：若 $a(ij)$ 是随着坐标系按一定规律变换的 9 个数的数组，b_i 是任意矢量，且 $a(ij)b_ib_j=m$ 为一标量，则 $a(ij)+a(ji)$ 为二阶张量。

第四章 变矢

§4.1 矢性函数

正如标量有常量、变量和函数等概念一样，矢量也有常矢、变矢(variable vector)和矢性函数等概念。例如一个动点 p 的矢径 $\overrightarrow{Op}$ 就是一个不断变化的矢量——变矢。

设自变量 t 在某个范围内变化时，对于 t 的每一个值都有变矢 $\boldsymbol{A}$ 的一个确定的大小与方向与之对应，则称 $\boldsymbol{A}$ 为关于 t 的矢性函数，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)。\qquad (4.1)$$

用指标符号表示就是

$$a_i=a_i(t)\quad (i=1,2,3)。\qquad (4.2)$$

采用并矢符号，则有

$$\boldsymbol{A}(t)=a_i(t)\boldsymbol{E}_i。\qquad (4.3)$$

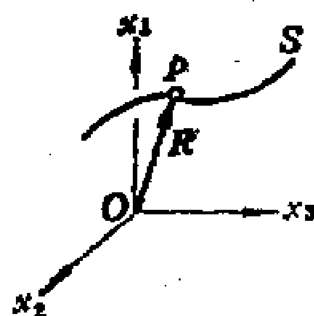


图 4-1

矢性函数的自变量可以是标量，也可以是矢量或张量。本章仅讨论标量 t 的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，它的连续、可导等概念由 $a_i(t)$ 的连续、可导等给出，此处不再重复。

动点 p 的矢径 $\boldsymbol{R}$ 是时间 t 的连续函数，写成

$$\boldsymbol{R}(t)=x_i(t)\boldsymbol{E}_i。 \tag{4.4}$$

当 t 在一定范围内变动时，$\boldsymbol{R}$的终点 p 描绘出一条连续曲线S即为 p的轨迹（图4-1）。$x_i=x_i(t)$称为该曲线的参数方程。

对于任意的连续变矢$\boldsymbol{A}(t)$，将其起点固定在原点，随着 t 变化，其终点也描绘出一条曲线，称为$\boldsymbol{A}$的矢端曲线（hodograph）。

§4.2 矢性函数的导数

（i）导数的定义

如果在$\Delta t\to 0$时，极限

$$\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

存在，则称此极限为 $\boldsymbol{A}(t)$在 t 处的导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}, \tag{4.5}$$

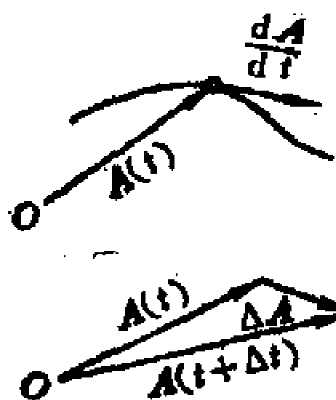


图 4-2

式中 $\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)$的计算，应按照矢量加法的三角形法则，将$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)$和$\boldsymbol{A}(t)$的端点放在同一个$O$点上作出（图4-2）。

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$也是一个矢量，称为$\boldsymbol{A}(t)$的导矢，它与$\boldsymbol{A}$的矢端曲线相切，指向 t 增大的方向（图4-2）。必要时，可以再求$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$的导数，即可以求$\boldsymbol{A}(t)$的二阶和高阶导数（如果存在

的话）。$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$存在的充要条件在几何上表现为$\boldsymbol{A}$的矢端曲线在该处连续光滑。

（2）导数公式

矢性函数$\boldsymbol{A}$的求导法则，与分量a_i的求导法则相同，现列出如下：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{C}=0,\quad（\boldsymbol{C}\text{ 为常矢}）;$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\pm\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(u\boldsymbol{A})=\frac{du}{dt}\boldsymbol{A}+u\frac{d\boldsymbol{A}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}。$$

若　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u)$，$u=u(t)$，则有

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{du}\ \frac{du}{dt}。$$

对矢量求导，可化为对其分量求导，用指标符号来计算：

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{da_i}{dt}\boldsymbol{E}_i。\qquad(4.6)$$

可见，用指标符号计算矢量求导时，可以完全套用标量求导法则，例如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e_{ijk}a_ib_j)=e_{ijk}\left(b_j\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t}+a_i\frac{\mathrm{d}b_j}{\mathrm{d}t}\right)。$$

例 4.1 已知变矢$\boldsymbol{A}(t)$的模不变，求证$\boldsymbol{A}$与其导矢$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$垂直。

证明 因为$\boldsymbol{A}$的模不变，所以标积$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$为常数，其导数为0，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=0,$$

故若$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\neq 0$，则必与$\boldsymbol{A}$垂直。

§4.3 曲线几何

(1) 自然参数

设曲线的参数方程为$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(t)$，即$x_i=x_i(t)$，则曲线弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{R}|=\sqrt{\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}}=\sqrt{\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i},\qquad(4.7)$$

a、b两点间的弧长为

$$s=\int_a^b\mathrm{d}s=\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t。$$

若将a点固定，作为计算弧长的起点，则弧长s是积分上限t_b的函数，记t_b为t，则

$$s=s(t)$$

为t的单值递增函数，因而必有反函数$t=t(s)$。将它代入曲线方程$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(t)$得，

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}[t(s)]=\boldsymbol{R}(s), \tag{4.8}$$

即任何曲线均可写成以其弧长 s 为自变量的参数方程。s 叫做曲线的自然参数，按照自然参数讨论曲线的几何性质有很大的方便。

（2）自然标架

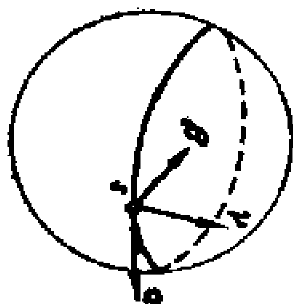


图 4-3

因为 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{R}|$，所以 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}$ 为单位矢量，在点 s 处与曲线 $\boldsymbol{R}(s)$ 相切，称为单位切矢，记作

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}。 \tag{4.9}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 的模不变，所以 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直。取

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|}, \tag{4.10}$$

则 $\boldsymbol{\beta}$ 亦为单位矢量，称为曲线在点 s 的主法矢。再定义单位矢量

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} \tag{4.11}$$

为曲线在点 s 的副法矢，于是在曲线的每一点上，都有相应的3个正交单位矢 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$，它们构成局部的参考标架，称为自然标架或 Frenet 标架（图 4-3）。

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 所确定的平面称为密切平面。对于平面曲线来说，密切平面就是曲线所在平面。由 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 所确定的平面称为从切平面；由 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 所确定的平面称为法平面。

（3）曲率和挠率（curvature and torsion）

切矢 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示曲线的方向，它的变化说明了曲线的弯曲，

定义

$$\kappa=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right| \tag{4.12}$$



图 4-4

为曲线的曲率。因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模为 1，所以 $|\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}|$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转角(图 4-4)。由此可知，曲率表示曲线每单位长度的转角的极限。

直线的曲率为 0。半径为 ρ 的圆弧，$\kappa=\frac{1}{\rho}$，所以又称 $\frac{1}{\kappa}$ 为曲率半径。由(4.10)式知：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\kappa\boldsymbol{\beta}。 \tag{4.13}$$

副法矢 $\boldsymbol{\gamma}$ 就是密切平面的法矢。平面曲线的 $\boldsymbol{\gamma}$ 为常矢，故 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}=0$；而空间曲线的 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}$ 表示了曲线的挠曲。定义

$$\tau=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\beta}=\pm\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}\right| \tag{4.14}$$

为曲线的挠率。挠率与曲率不同，有正负之分；可以这样形象化地来说明 τ 的正负：当曲线贴着密切平面向左弯时，如果同时向上弯，则此时的挠率 τ 为正值，即像右手螺旋线那样挠曲时，挠率为正。现在对(4.14)式说明如下：

因为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\alpha}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}。 \tag{4.15}$$

可见 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}$ 不仅与 $\boldsymbol{\gamma}$ 垂直，且与 $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直，即 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}/\!/\boldsymbol{\beta}$。(4.14)式

规定$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}$与$\boldsymbol{\beta}$同方向时，$\tau$取负值。于是还有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}=-\tau\boldsymbol{\beta}。\tag{4.16}$$

(4.13)式和(4.16)式给出了$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}$、$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}$的表示式，下面再给出$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}$的表示式。

因为　$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$，故有$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}$。考虑到(4.13)式和(4.16)式，便可得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}=\tau\boldsymbol{\gamma}-\kappa\boldsymbol{\alpha}。\tag{4.17}$$

表示式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\kappa\boldsymbol{\beta},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}=\tau\boldsymbol{\gamma}-\kappa\boldsymbol{\alpha},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}=-\tau\boldsymbol{\beta}$$

称为Frenet-Serret公式。

上面从几何上给出了切矢$\boldsymbol{\alpha}$、主法矢$\boldsymbol{\beta}$、副法矢$\boldsymbol{\gamma}$、曲率κ和挠率τ的定义以及它们之间的相互关系；下面用指标符号给出它们的计算式，采用符号“$\cdot$”表示对弧长s求导“$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$”。

$$\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{R}}(s)=\boldsymbol{E}_i\dot{x}_i,\tag{4.18}$$

$$\kappa=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|=|\ddot{\boldsymbol{R}}|=(\ddot{x}_i\ddot{x}_i)^{\frac{1}{2}},\tag{4.19}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}/\kappa=\ddot{\boldsymbol{R}}/|\ddot{\boldsymbol{R}}|=\boldsymbol{E}_s\ddot{x}_s/(\ddot{x}_k\ddot{x}_k)^{\frac{1}{2}},\tag{4.20}$$

$$\gamma=\alpha\times\beta=\dot{\boldsymbol{R}}\times\ddot{\boldsymbol{R}}/|\ddot{\boldsymbol{R}}|$$

$$=\boldsymbol{E}_i e_{ijk}\dot{x}_j\ddot{x}_k/(\ddot{x}_s\ddot{x}_s)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.21)$$

在(4.17)式两边点乘 $\boldsymbol{\gamma}$，得

$$\tau=\gamma\cdot\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}=\frac{\dot{\boldsymbol{R}}\times\ddot{\boldsymbol{R}}}{|\ddot{\boldsymbol{R}}|}\cdot\left(\frac{\dddot{\boldsymbol{R}}}{|\ddot{\boldsymbol{R}}|}+\ddot{\boldsymbol{R}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\;\frac{1}{|\ddot{\boldsymbol{R}}|}\right)$$

$$=[\dot{\boldsymbol{R}}\ddot{\boldsymbol{R}}\dddot{\boldsymbol{R}}]/\ddot{\boldsymbol{R}}\cdot\ddot{\boldsymbol{R}}$$

$$=e_{ijk}\dot{x}_i\ddot{x}_j\dddot{x}_k/\ddot{x}_s\ddot{x}_s。 \qquad (4.22)$$

例 4.2 设有平面曲线 $y=y(x)$，试用 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 表示其曲率 κ。

解 求解此题时，只要将参数方程 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 中的导数化为以 x 为自变量的方程 $y=y(x)$，$s=s(x)$ 中的导数即可。由

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$$

出发，视 x 为自变量，得：

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)^2=1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=1\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\pm(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (4.23)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=-y'y''(1+y'^2)^{-2}。$$

当取 s 为参变量时，有

$$1=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2。$$

所以 $$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dy}{ds}=0,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{1}{y'}\frac{d^2x}{ds^2}=y''(1+y'^2)^{-2}。\qquad(4.24)$$

将(4.23)式和(4.24)式代入曲率κ的表达式(4.19)中，得：

$$\kappa=\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pm y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

即为题意所求。

§4.4 运动坐标系

设p为一运动质点，其矢径$\boldsymbol{R}(t)$是时间t的函数，则$x_i=x_i(t)$是质点运动轨迹的参数方程。质点的速度为

$$\boldsymbol{V}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\quad 或\quad v_i=\frac{dx_i}{dt},$$

加速度为

$$\boldsymbol{A}=\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt}\quad 或\quad a_i=\frac{d^2x_i}{dt^2}。$$

运动、速度和加速度都是相对于一定的坐标系而言的，x_i、$\frac{dx_i}{dt}$和$\frac{d^2x_i}{dt^2}$分别只是p点相对于选定的坐标系$\{x_i\}$的相对位置（坐标）、相对速度和相对加速度。

原始的力学规律都是相对于惯性坐标系建立的。如果$\{x_i\}$不是惯性坐标系，则应视它为相对于惯性系而运动的运动坐标系，它的原点O是动点，它的基$\boldsymbol{E}_i$（参考标架）为一组变矢。

现在我们要分析导矢$\frac{d\boldsymbol{E}_s}{dt}$。

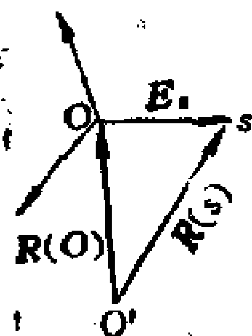


图 4-5

$\{x_i\}$的原点O相对于惯性坐标系的矢径（绝对矢径）记为$\boldsymbol{R}(O)$，O是$\boldsymbol{E}_s$的始点，记$\boldsymbol{E}_s$的终点为s，s的绝对矢径为$\boldsymbol{R}(s)$（图 4-5），则点s的绝对速度为

$$\boldsymbol{V}(s)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{R}(s)$$

$$=\frac{d}{dt}\boldsymbol{R}(O)+\frac{d\boldsymbol{E}_s}{dt},$$

式中　$\frac{d}{dt}\boldsymbol{R}(O)=\boldsymbol{V}(O)$为点$O$的速度。由理论力学知，点$s$的速度可分解为

$$\boldsymbol{V}(s)=\boldsymbol{V}(O)+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{E}_s,$$

故得

$$\frac{d\boldsymbol{E}_s}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{E}_s。\tag{4.25}$$

式中的Ω为参考标架$\boldsymbol{E}_s$的旋转角速度矢量。上式也可写成并矢符号

$$\frac{d\boldsymbol{E}_s}{dt}=\omega_i\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{E}_s=\boldsymbol{E}_j e_{jis}\omega_i,\tag{4.26}$$

式中的ω_i是$\boldsymbol{\Omega}$在运动坐标系中的分量，$\omega_i=\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{E}_i$。(4.25)式说明$\frac{d\boldsymbol{E}_s}{dt}$与$\boldsymbol{E}_s$垂直。

例 4.3　一质点在半径为ρ的球面上运动，证明其向心加速度为$a_r=\frac{V^2}{\rho}$。

解 质点在球面上运动，它关于球心的矢径 $\boldsymbol{R}$ 的模为常数，即

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}=\rho^2。$$

用"$\cdot$"表示对时间求导，即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$。求导两次，得 $\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}=0$ 和 $\ddot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}+\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}=0$，即

$$\ddot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}=-\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}=-V^2,$$

向心加速度为

$$a_r=\ddot{\boldsymbol{R}}\cdot(-\boldsymbol{R}/\rho)=V^2/\rho。$$

§4.5 矢性函数的积分

(1) 不定积分

若$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)$，则称 $\boldsymbol{B}(t)$是$\boldsymbol{A}(t)$的一个原函数，原函数的全体叫做不定积分，记作$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$，则有

$$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{C}, \tag{4.27}$$

式中的 $\boldsymbol{C}$ 为任意常矢。

不定积分的并矢符号与指标符号分别为

$$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{E}_i\int a_i(t)\mathrm{d}t;$$

$$\int a_i(t)\mathrm{d}t=b_i(t)+C_i。\tag{4.28}$$

指标符号的矢性函数积分法则与一般标量函数的积分法则完全相同，此处不再重复。求1个矢性函数的不定积分，归结为求3个标量函数的不定积分。

（2）定积分

设 $\boldsymbol{A}(t)$在区间$[a,b]$上连续，由点 $a=t_0<t_1<\cdots t_n=b$ 将区间$[a,b]$分为 n 分，用 q_k 记(t_{k-1}, t_k)间的任何一个值，用 λ 记 $\max\Delta t_k$，则定义极限

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}(q_k)(t_k-t_{k-1}) \tag{4.29}$$

为$\boldsymbol{A}(t)$由 a 到 b 的定积分，记作

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t。$$

定积分的计算归结为求原函数 $\boldsymbol{B}(t)$，

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{B}(b)-\boldsymbol{B}(a)。 \tag{4.30}$$

相应的并矢符号与指标符号分别为

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{E}_i\int_a^b a_i(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b a_i(t)\mathrm{d}t=b_i(b)-b_i(a)。 \tag{4.31}$$

式中的 $b_i(t)$为 $a_i(t)$的原函数。

习　题　4

4.1　求螺旋线 $x_1=a\cos t$，$x_2=a\sin t$，$x_3=bt$ 在任意点的曲率 κ 和挠率 τ。

4.2　质点沿曲线运动，证明其加速度为 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\alpha}+\dfrac{V^2}{\rho}\boldsymbol{\beta}$。

4.3　设 $\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{E}_1a\sin\theta+\boldsymbol{E}_2a\cos\theta+\boldsymbol{E}_3b$，试求定积分

$$T=\int_0^{2\pi}\left(\boldsymbol{R}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\theta}\right)\mathrm{d}\theta。$$

第五章　矢量和张量在理论力学中的应用

§5.1　质点的运动

牛顿力学是以惯性坐标系(或称绝对坐标系)为出发点的，但是我们也经常需要在非惯性运动坐标系中处理力学问题，因此需要建立速度、加速度等力学量在这两组坐标系之间的转换关系。

设动坐标系的参考标架是$\boldsymbol{E}_i$，在动坐标系中选一个参考点m，其矢径(绝对位置)为$\boldsymbol{P}$。所要研究的运动质点s的绝对位置为$\boldsymbol{Q}$，相对于m点的位置为$\boldsymbol{R}$(图5-1)，则有

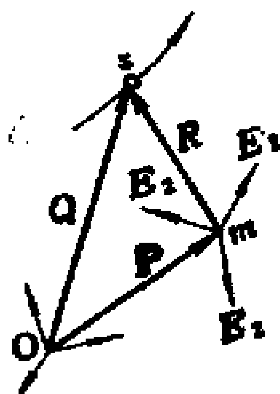


图 5-1

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}, \qquad (5.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}, \qquad (5.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}。 \qquad (5.3)$$

式中的$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t^2}$是质点$s$的(绝对)速度和加速度；$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t^2}$是参考点$m$的(绝对)速度和加速度；

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}$则是质点 s 相对于参考点m的相对速度和相对加速度。

现在进一步对相对速度和相对加速度进行分析。

在动坐标系中将$\boldsymbol{R}$写成 $\boldsymbol{R}=r_i\boldsymbol{E}_i$，则 s 相对于点m的相对速度为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}+r_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}。\quad(5.4)$$

式中的$\boldsymbol{\Omega}$是动坐标系的旋转角速度，而$\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}$这个量能够被随着动坐标系一同运动的观察者观测到，称为点 s 在动坐标系中的视速度（apparent velocity），或称为点 s 相对于动坐标系的相对速度，它与相对于参考点的相对速度是不同的。

在处理问题时，为了方便，可以选取在此瞬时与点 s 重合的点为参考点m。在这种情况下，$\boldsymbol{R}=0$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}$，上述两种相对速度就一致了。在此瞬时与点 s 重合的参考点m叫做牵连点，m的速度叫做牵连速度，(5.2)式可表述为

绝对速度＝牵连速度＋相对速度。

对于相对加速度，也可以作类似的分析：

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}+r_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}_i}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}^2r_i}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}+r_i\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}_i}{\mathrm{d}t^2}。\quad(5.5)$$

(5.5)式右端的第一项 $\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}^2r_i}{\mathrm{d}t^2}$是质点 s 相对于动坐标系的视加

速度；第二项可以表达成

$$2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}_i}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V}_{app}, \qquad (5.6)$$

通常称为哥氏（Coriolis）加速度。式中的$\boldsymbol{\Omega}$为动坐标系的角速度，$\boldsymbol{V}_{app}=\boldsymbol{E}_i\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t}$为点 s 相对于动坐标系的视速度。

(5.5)式右端的第三项为

$$r_i\ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}_i}{\mathrm{d}t^2}=r_i\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{E}_i)$$

$$=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}), \qquad (5.7)$$

它与动坐标系的角速度及角加速度有关。同前面一样，可以选取在此瞬时与点 s 重合的点为参考点，即牵连点，故(5.7)式为 0，(5.3)式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{E}_i\ \frac{\mathrm{d}^2r_i}{\mathrm{d}t^2}+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V}_{app}, \qquad (5.8)$$

它可表述为

绝对加速度＝牵连加速度＋视加速度＋哥氏加速度。

§5.2 刚体的运动

(1) 地轴系、体轴系和变换系数

刚体的运动包括移动和转动。移动表现为刚体上某一参考点位置的变动，转动则表现为刚体姿态（attitude）的变动。为了描述刚体的姿态，可取一组与刚体联在一起、随着刚体运动的体轴系 $\boldsymbol{E}_i$ 和一组固定在地面上地轴系 $\boldsymbol{G}_{i'}$。这两组坐标

轴之间的 9 个方向余弦，亦即两组坐标系之间的 9 个变换系数

$$l_{ij'}=\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{G}_{j'} \tag{5.9}$$

就是对刚体姿态最全面的描述。刚体姿态有 3 个自由度，9 个变换系数中，也只有 3 个是独立的。

如果有 3 组参考标架 $\boldsymbol{E}_i$、$\boldsymbol{F}_{j'}$和 $\boldsymbol{G}_{k''}$，例如是体轴系在 3 个不同时刻的位置，相应地可以有 3 组变换系数：

$$\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{F}_{j'}=l_{ij'},\quad \boldsymbol{F}_{j'}\cdot\boldsymbol{G}_{k''}=m_{j'k''}$$

和

$$\boldsymbol{G}_{k''}\cdot\boldsymbol{E}_i=n_{k''i}, \tag{5.10}$$

则必有关系

$$n_{k''i}=l_{ij'}m_{j'k''}。 \tag{5.11}$$

即由$\boldsymbol{E}_i$到 $\boldsymbol{G}_{k''}$的变换系数可以通过中间状态$\boldsymbol{F}_{j'}$来求。(5.11）式的证明很简单：由(3.2)式知 $\boldsymbol{E}_i=l_{ij'}\boldsymbol{F}_{j'}$，在此等式两端都点乘以 $\boldsymbol{G}_{k''}$，便得到(5.11)式。(5.11)式还可以写成

$$\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{G}_{k''}=\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{F}_{j'}\boldsymbol{F}_{j'}\cdot\boldsymbol{G}_{k''}。 \tag{5.12}$$

只要注意到 $\boldsymbol{F}_{j'}\boldsymbol{F}_{j'}=\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_i$，上式立即可得到证明。

由(5.10)式给出的变换系数，其指标的排列顺序是任意的，例如若用 $n_{ik''}$来代替 $n_{k''i}$，则(5.11)式也可以写成 $n_{ik''}=l_{ij'}m_{j'k''}$。只要注意到矩阵$(n_{k''i}^T)$与$(n_{ik''})$互为转置，(5.11)式用矩阵计算时等式左端矩阵也要转置，便知用 $n_{ik''}$ 代替$n_{k''i}$对(5.11)式并无任何影响。同样，也可以用 $l_{j'i}$ 代替 $l_{ij'}$，或用 $m_{k''j'}$代替 $m_{j'k''}$。因此(5.11)式可以有 8 种写法。

在 3 组参考标架中，取哪一组作为中间状态也是任意的，所以与(5.11)式等价还可以有另外两种形式，$l_{ij'}=m_{j'k''}n_{k''i}$和 $m_{j'k''}=n_{k''i}l_{ij'}$。这也就是说(5.11)式可以写成 24 种形式，在选择上有很大的自由，这不但不会引起混乱，而且这正是指标符号的优点。我们只要注意等式两端的自由标必须相同（次序

可以不同），则怎么写都是正确的。

以上介绍的求变换系数的方法很容易推广到有多个中间状态的场合，形式是显然的。

(2) 欧拉角（Eulerian angle）

我们除了可以用从体轴系到地轴系的坐标变换系数来描述刚体的姿态外，也可以选择其他参数来描述刚体的姿态，一般需要3个独立参数。至于用什么具体的参数，要视问题的性质而定。在陀螺理论中采用的参数是欧拉角，它们的定义以及和坐标变换系数的关系如下。

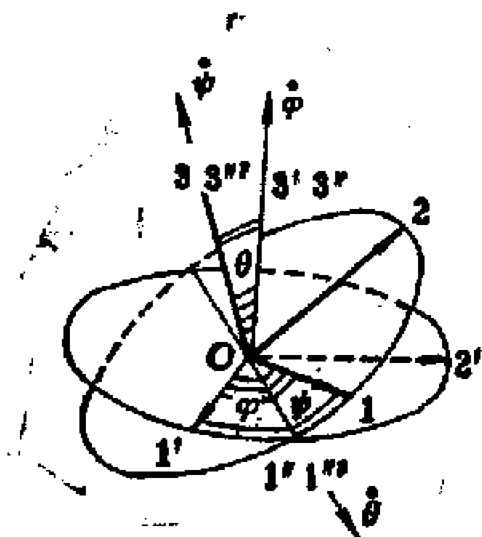


图 5-2

先设体轴系与地轴系 $G_{i'}$ 重合，第一步，将体轴系绕 $G_{3'}$ 转动角度 φ（图 5-2），变成参考标架 $E_{i''}$，变换系数矩阵为

$$(r_{i''i'}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

第二步，将 $E_{i''}$ 绕 $E_{1''}$ 转动角度 θ，变为 $E_{k'''}$，变换系数矩阵为

$$(s_{k'''i''}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}。$$

最后，将 $E_{k'''}$ 绕 $E_{3'''}$ 转动角度 ψ，变为最终的体轴系 E_p，变换系数矩阵为

$$(t_{pk'''})=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。$$

现在可以利用(5.11)来计算由体轴系$\boldsymbol{E}_p$到地轴系 $\boldsymbol{G}_{j'}$的变换系数：

$$\boldsymbol{E}_p\cdot\boldsymbol{G}_{j'}=l_{pj'}=t_{pk'''}s_{k'''i''}r_{i''j'}。$$

将以上 3 个矩阵相乘，最后得到

$$\begin{pmatrix}l_{11'} & l_{12'} & l_{13'}\\ l_{21'} & l_{22'} & l_{23'}\\ l_{31'} & l_{32'} & l_{33'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\\ -\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}。$$

式中的 φ 称为进动角（precession angle），θ 称为章动角（nutation angle），ψ 称为自转角（rotation angle），这三个角，统称为欧拉角。

（3）定点转动的运动学方程

由于φ、ψ、θ都是独立变量，所以刚体的角速度可写成

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{G}_{3'}+\dot{\psi}\boldsymbol{E}_3+\dot{\theta}\boldsymbol{E}_{1''},$$

式中 $\dot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$代表的角速度称为进动，$\dot{\psi}=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$称为自转，$\dot{\theta}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$称为章动，刚体的角速度为三者之和。

$\boldsymbol{\Omega}$ 在体轴系中的分量即投影为 $\omega_i=\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{E}_i$，它们是

$$
\left.\begin{aligned}
\omega_1&=\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{E}_1=\dot{\varphi}l_{13'}+\dot{\psi}\delta_{13}+\dot{\theta}\cos\psi=\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi\\
\omega_2&=\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{E}_2=\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi\\
\omega_3&=\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{E}_3=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}
\end{aligned}\right\}。
\tag{5.13}
$$

以上3个方程将角速度分量与欧拉角及其导数联系了起来，称为定点转动的运动学方程。

§5.3 定点转动

(1) 动量矩、转动惯量



图 5-3

设刚体以角速度$\boldsymbol{\Omega}$绕定点O旋转，现在来计算它关于O点的动量矩$\boldsymbol{H}$。为此在刚体中取一微元，它的质量是$d\tau$，关于O点的矢径是$\boldsymbol{R}$，速度是$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}$(图5-3)，则微元关于O点的动量矩为$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}d\tau$。将它对$d\tau$进行积分，便得到整个刚体关于O点的动量矩：

$$
\boldsymbol{H}=\int_{\tau}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}d\tau。\tag{5.14}
$$

上式中的被积函数为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}&=\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\Omega})\\
&=\boldsymbol{E}_j(\omega_j x_k x_k-x_j x_s\omega_s)。
\end{aligned}
$$

其中的x_i为$d\tau$的坐标，而ω_i则是与$d\tau$无关的常数，可以提出到积分运算之外，令

$$
\omega_j x_k x_k-x_j x_s\omega_s=\omega_s(x_k x_k\delta_{sj}-x_s x_j),
$$

则

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}_j\omega_s\int_\tau(x_kx_k\delta_{sj}-x_sx_j)\mathrm{d}\tau。\tag{5.15}$$

式中的 ω_s 仅与运动有关，而积分仅与刚体的质量分布有关，与运动无关。再令

$$J_{sj}=\int_\tau(x_kx_k\delta_{sj}-x_sx_j)\mathrm{d}\tau,\tag{5.16}$$

则动量矩的计算式为

$$\boldsymbol{H}=\omega_sJ_{sj}\boldsymbol{E}_j,\quad 即\quad h_j=\omega_sJ_{sj}。\tag{5.17}$$

J_{sj} 是二阶张量，称为刚体的转动惯量，它有 9 个分量。由(5.16)式知，转动惯量是对称张量：

$$J_{sj}=J_{js}。$$

现在对 s、j 取具体数，由(5.16)式写出 J_{sj} 分量的表达式：

$$J_{11}=\int_\tau(x_2^2+x_3^2)\mathrm{d}\tau,\quad J_{22}=\int_\tau(x_3^2+x_1^2)\mathrm{d}\tau,$$

$$J_{33}=\int_\tau(x_1^2+x_2^2)\mathrm{d}\tau,\quad J_{12}=J_{21}=-\int_\tau x_1x_2\mathrm{d}\tau,$$

$$J_{23}=J_{32}=-\int_\tau x_2x_3\mathrm{d}\tau,\quad J_{31}=J_{13}=-\int_\tau x_3x_1\mathrm{d}\tau。$$

如果用 x、y、z 代替 x_1、x_2、x_3，就得到了在理论力学中熟知的表达式。但是这里按照严谨的张量体系，在惯性积的定义式前面加上了负号。

从这里可以看到用张量处理定点转动问题是很简捷、自然的，这是因为转动惯量原本就是张量。转动惯量 J_{sj} 的 9 个分量的值，与所选用的坐轴系有关，如果选择得恰当，可使 $i'\neq j'$ 时 $J_{i'j'}=0$，即 $J_{i'j'}$只有 3 个分量 $J_{1'1'}$、$J_{2'2'}$、$J_{3'3'}$ 不为 0；这样的坐标系，称为主惯性轴系。寻找主惯性轴系的问题，亦即求二阶对称张量主轴的问题，归结为求矩阵 (J_{sj}) 的

本征值，它是“线性代数”的一个重要内容，这里就不详细介绍了。

（2）体轴系

牛顿力学定律都是在惯性坐标系中建立的，可以适用于地轴系。但是在地轴系中直接求解刚体动力学问题有极大的困难，这是因为刚体在运动时与地轴系的相对位置不断发生变化，因而转动惯量矩阵也在不断变化，这将很难处理。为了能将转动惯量作为常量来运算，我们必须将坐标系固联在刚体上。这样的坐标系就叫做体轴系，它是运动坐标系。

在§4.4中已讨论过运动坐标系，它的特点是参考标架$\boldsymbol{E}_i$为变矢，且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{E}_i=e_{ijk}\omega_k\boldsymbol{E}_j。\qquad(5.18)$$

这个关系后来被应用于§5.1质点的运动中，在那里我们的目的是分析质点相对于运动坐标系的相对速度。在刚体动力学中情况则不同，刚体与体轴系固联，二者之间是没有相对速度的。我们现在要研究的是如何在体轴系中表述一个矢量$\boldsymbol{K}$（如力、动量、绝对速度等）对时间t的导数$\dot{\boldsymbol{K}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}$。记$\boldsymbol{K}=k_i\boldsymbol{E}_i$，

则有$\dot{\boldsymbol{K}}=\dot{k}_i\boldsymbol{E}_i+k_i\dot{\boldsymbol{E}}_i$。考虑到$\dot{\boldsymbol{E}}_i=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{E}_i$，则有

$$\dot{\boldsymbol{K}}=\dot{k}_i\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{K}=\boldsymbol{E}_i(\dot{k}_i+e_{ijk}\omega_jk_k)。\qquad(5.19)$$

这就是说，在运动坐标系中，一个矢量$\boldsymbol{K}$对时间的导数不能仅由分量的导数$\dot{k}_i$来计算，而要补充一项$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{K}$，只有一个例外，就是参考标架本身的角加速度

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}=\dot{\omega}_i\boldsymbol{E}_i,\qquad(5.20)$$

这是因为$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}=0$。

§5.4 刚体动力学

在这一节中我们将在最普遍的情况下建立刚体动力学方程，刚体作任意空间运动，体轴系是任意直角坐标系，不是主惯性轴系，也不通过刚体的质心。这样一组方程形式比较复杂，主要用于飞行器弹道计算的专门课题，在一般的理论力学教材中通常不作介绍。但是运用张量方法，我们只需要根据牛顿第二定律就能很方便地将这组方程建立起来，这组方程具有最完备的形式，刚体作特殊运动时或体轴系采用特定坐标系时的运动方程，均可视为它的特例。

(1) 力的计算式

我们已从理论力学熟知

$$\boldsymbol{F}=m\dot{\boldsymbol{V}}(s), \tag{5.21}$$

式中的$\boldsymbol{F}$为作用于刚体上的合力，m为刚体质量，$\boldsymbol{V}(s)$为质心速度，$\dot{\boldsymbol{V}}(s)$为其加速度。现在将$\boldsymbol{V}(s)$和$\dot{\boldsymbol{V}}(s)$换算成体轴系原点的速度$\boldsymbol{V}(O)$和加速度$\dot{\boldsymbol{V}}(O)$。

$$\boldsymbol{V}(s)=\boldsymbol{V}(O)+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R},$$

式中的$\boldsymbol{R}$为质心的矢径，于是

$$\dot{\boldsymbol{V}}(s)=\dot{\boldsymbol{V}}(O)+\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{R}}, \tag{5.22}$$

式中

$$\dot{\boldsymbol{V}}(O)=\dot{v}_i\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V}(O)=\boldsymbol{E}_i(\dot{v}_i+e_{ijk}\omega_j v_k), \tag{5.23}$$

v_i为原点O的速度在体轴系的分量；

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}_i e_{ijk}\dot{\omega}_j x_k,$$

其中 x_k 为质心的坐标；

$$\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{R})-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})$$
$$=\boldsymbol{E}_i(\omega_i\omega_s x_s-x_i\omega_s\omega_s)。$$

将以上3式代入(5.22)式和(5.21)式，记$\boldsymbol{F}$的指标符号为 f_i，得

$$f_i=m[\dot{v}_i+e_{ijk}(\omega_j v_k+\dot{\omega}_j x_k)+\omega_i\omega_s x_s-x_i\omega_s\omega_s]。\tag{5.24}$$

这就是作用于刚体的合力的最一般的计算式。

(2) 力矩的计算式

作用于刚体上的关于坐标原点O的合力矩，应为

$$\boldsymbol{L}=\int\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{V}}\mathrm{d}\tau,\tag{5.25}$$

式中的 $\mathrm{d}\tau$ 是刚体中任意微元的质量，$\boldsymbol{R}$是它关于O点的矢径，$\boldsymbol{V}$ 是它的速度。记 $\boldsymbol{V}(O)$为坐标原点的速度，则

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(O)+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{R}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{V}(O)+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}]$$

$$=\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{V}}(O)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})]-\dot{\boldsymbol{R}}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})。$$

由于$\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}$，所以上式最后一项为$O$，记$\int\boldsymbol{R}\mathrm{d}\tau=m\boldsymbol{R}(s)$，则

$$\boldsymbol{L}=m\boldsymbol{R}(s)\times\dot{\boldsymbol{V}}(O)-\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})]\mathrm{d}\tau,\tag{5.26}$$

式中 $\boldsymbol{R}(s)$为质心的矢径。由(5.23)式可知，上式右端第一项

$$m\boldsymbol{R}(s)\times\dot{\boldsymbol{V}}(O)=m\boldsymbol{R}(s)\times\boldsymbol{E}_k(\dot{v}_k+e_{pqk}\omega_p v_k)$$

$$=m\boldsymbol{E}_i e_{ijk}x_j(\dot{v}_k+e_{pqk}\omega_p v_k)$$

$$=m\boldsymbol{E}_i(e_{ijk}x_j\dot{v}_k+\omega_i v_j x_j-v_i\omega_j x_j)。\tag{5.27}$$

由于积分是在体轴系中进行的，积分变元$d\tau$与时间无关，因此(5.26)式中的积分可写成

$$\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})d\tau=\frac{d}{dt}(J_{is}\omega_s\boldsymbol{E}_i)$$

$$=J_{is}\dot{\omega}_s\boldsymbol{E}_i+J_{ks}\omega_s\dot{\boldsymbol{E}}_k$$

$$=\boldsymbol{E}_i(J_{is}\dot{\omega}_s+e_{ijk}J_{ks}\omega_s\omega_j)。\tag{5.28}$$

将(5.27)式和(5.28)式代入(5.26)式中，最后得到力矩计算式的指标符号为

$$l_i=J_{is}\dot{\omega}_s+e_{ijk}J_{ks}\omega_s\omega_j+m(e_{ijk}x_j\dot{v}_k+$$
$$+\omega_i v_s x_s-v_i\omega_s x_s)。\tag{5.29}$$

式中的J_{is}为刚体关于所选定的任意体轴系的转动惯量，其他符号的意义与(5.24)式中的相同。

§5.5 抽象符号的应用

以上各节，都是先从力学定律着手，用抽象符号建立关系，然后化为指标符号导出方程。实际上，具体的方程求解、数值计算都必须通过指标符号进行。最终的公式必须是指标符号。有人偏爱抽象符号，推导公式从头至尾都用抽象符号，直到最后需要作具体计算时才化为指标符号。这种做法的优点是

书写更为紧凑，直观的力学意义也较明显；其缺点是要规定一套运算法则，初学者不易掌握。现以定点转动时动量矩的计算为例，用抽象符号作推导，与§5.3进行对比。

回到(5.14)式：

$$\boldsymbol{H}=\int \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}\mathrm{d}\tau, \tag{5.30}$$

式中 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}$，所以

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})=(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}。$$

现在要将$\boldsymbol{\Omega}$归并，以便提到积分之外，可将(5.30)式写成

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})-\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}), \tag{5.31}$$

但是上式右端第一个括号$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})$是标量，第二个括号$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R})$是并矢，即二阶张量，这两者阶数不同，与$\boldsymbol{\Omega}$的乘法运算也不同，一个是数乘，另一个是点乘，因此不能应用分配律归并到一个积分式中。为此，须将(5.31)等式右端第一项写成

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{\Omega}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}),$$

式中的$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_i$是二阶张量（见§3.2），任何张量与$\widetilde{\boldsymbol{E}}$点乘仍等于它自己。于是(5.31)式可写成

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}\cdot[\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})-\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}],$$

代入(5.30)式，得

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\Omega}\cdot\int[\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})-\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}]\mathrm{d}\tau。 \tag{5.32}$$

记

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}=\int[\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})-\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}]\mathrm{d}\tau \tag{5.33}$$

为转动惯量的抽象符号，则得

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\Omega}\cdot\widetilde{\boldsymbol{J}}, \tag{5.34}$$

它与(5.17)式等价。

采用并矢符号，很容易将上面3式化为指标式：

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})-\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{E}_s x_m x_m-x_s x_k\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{E}_k$$

$$=\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{E}_k(\delta_{sk}x_m x_m-x_s x_k),$$

代入(5.33)式便得

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{E}_k J_{sk},$$

再代入(5.34)式，得

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{E}_k J_{sk}=\omega_s J_{sk}\boldsymbol{E}_k,$$

将上式两端点乘 $\boldsymbol{E}_i$，得

$$h_i=\omega_s J_{si},$$

即为(5.17)式。

从上面的演算可以看到，用抽象符号作演算时，用到关系式 $\boldsymbol{\Omega}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{\Omega}$，它与指标符号的 $\omega_i\delta_{is}=\omega_s$ 相当。指标符号含义明确，算法简便，若要改为抽象符号则要另外规定运算符号和规则。例如 $a_{ij}b_{jk}$ 相应于$\widetilde{\boldsymbol{A}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}}$，$b_{ij}a_{jk}$ 相应于$\widetilde{\boldsymbol{B}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}$，$a_{ij}b_{ij}$ 相应于$\widetilde{\boldsymbol{A}}:\widetilde{\boldsymbol{B}}$。但是指标符号还可以有多种多样，例如 $a_{ij}b_{ik}$，a_ib_{ijk}，a_jb_{ijk}，a_kb_{ijk} 等，它们各与什么样的抽象符号相对应呢？要解决这个问题必须再规定很多运算符号和规则，否则抽象符号将无能为力。

综上所述可知，指标算式含义明确，算法简便，有时还可以很方便地改写成矩阵算式；用指标符号表示数组，与计算机语言一致，哑标求和可由循环语句实现。这些都是指标符号的明显优点。抽象符号用于高阶张量是不方便的，但用于矢量和二阶张量时，直观性强，用来表达力学规律，有其简明之处。

较好的选择是兼取两种符号之长：先用抽象符号建立方程，在推导过程中间用并矢符号进行转换，最后的结论写成指标符号。至于在推导过程中的哪一步进行转换，则可灵活掌握。例如用

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \\ &= (a_s b_k c_s - a_s b_s c_k)\boldsymbol{E}_k, \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= e_{lmi}a_m e_{ijk}b_j c_k \boldsymbol{E}_l \\ &= a_m b_j c_k \boldsymbol{E}_l(\delta_{lj}\delta_{mk}-\delta_{lk}\delta_{mj}) \\ &= (a_m b_l c_m - a_m b_m c_l)\boldsymbol{E}_l \end{aligned}$$

都能得到同样结果，但前者要来得简捷。

习　题　5

5.1 证明刚体绕定点转动时的动能为

$$e=\frac{1}{2}J_{ij}\omega_i\omega_j,$$

并将它写成矩阵算式。

5.2 令(5.24)式中的自由标 $i=1$，将哑标求和展开并用下标 x、y、z 代替 1、2、3，写出 f_x 的表达式。

5.3 刚体作定点转动，将它所受到的关于定点的力矩 l_1、l_2、l_3 写成矩阵算式。

5.4 用抽象符号写出刚体作定点转动时关于定点的力矩的计算式。

5.5 飞行器的姿态可用姿态角——偏航（yaw）ψ、俯仰(pitching)θ 和滚转(rolling)φ 来表示，它们的定义如下（图

5-4）：开始时，体轴系与地轴系 $\boldsymbol{G}_{i'}$ 重合；第一步，绕 $\boldsymbol{G}_{3'}$ 转动角度 ψ，变为 $\boldsymbol{E}_{i''}$；第二步，绕 $\boldsymbol{E}_{2''}$ 转动 θ，变为 $\boldsymbol{E}_{k'''}$；最后，绕 $\boldsymbol{E}_{1'''}$ 转动 ϕ，变成 $\boldsymbol{E}_m$，为体轴系的最终位置。求变换系数 $l_{mi'}=\boldsymbol{E}_m\cdot\boldsymbol{G}_{i'}$。

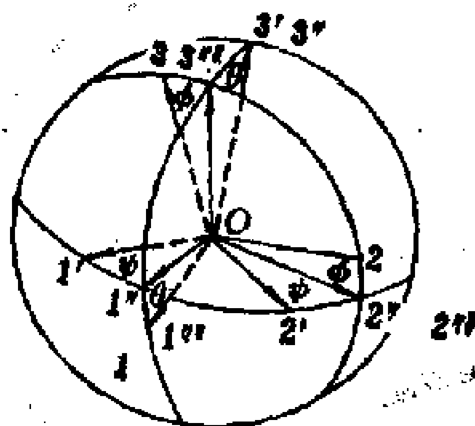


图 5-4

第六章　场论，微分运算

§6.1　场(field)

若在全部空间或某一部分空间里的每一点$\boldsymbol{R}$，都有某个物理量$\boldsymbol{A}$的一个确定的值和它对应，那么就称$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$是$\boldsymbol{A}$的场，这里$\boldsymbol{R}$是空间点的矢径，$\boldsymbol{A}$称为场量，对应点称为场点。如果$\boldsymbol{A}$是标量，则称之为标量场；$\boldsymbol{A}$是矢量，则称为矢量场；$\boldsymbol{A}$是张量，则称为张量场。例如，温度在介质中的分布构成了温度场，它是标量场；热量在介质中传导时，热流量构成了矢量场；固体介质受热不匀而变形，其应变(strain)构成二阶张量场。

若物理量$\boldsymbol{A}$在空间的分布依赖于时间t，即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R},t)$，则称这个场为非定常的(unsteady)；若$\boldsymbol{A}$与时间无关，即$\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$，则称这个场为定常的(steady)。本章不讨论场对于时间的依赖关系，即只讨论定常场，或讨论的场可能为非定常的，但讨论问题时限于某一固定时刻。

选定了坐标系$\{x_i\}$以后，定常场可以写成：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3)。$$

矢量场可视为3个变元的矢性函数，在前面第四章中，已讨论了1个变元的矢性函数，现在要予以扩大。

§6.2 标量场

标量场可由函数

$$u = u(x_1, x_2, x_3) \tag{6.1}$$

描述。从物理上讲，u 应是单值的。此外，我们还假定 u 具有连续的一阶偏导数。

(1) 等值面

为了直观地了解 u 在空间的分布情况，可以考察 u 值相同的点，即取

$$u(x_1, x_2, x_3) = c,$$

式中的 c 为常数。这个方程描述了一个曲面，称为 u 的等值面。如果令 u 等于不同的常数 c_1，c_2，…，则可得到一族等值面。因为 u 是单值函数，所以这一族曲面是互不相交的。

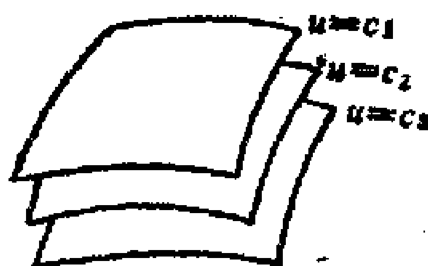


图 6-1

等值面能形象化地表示出场量 u 在空间的分布情况(图6-1)。

(2) 标量场的梯度(gradient)

若 u 为标量场，则它的 3 个偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 可定义一个矢量场 u_i，称为 u 的梯度，

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}。$$

采用符号 $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$，则可记为

$$u_i = \partial_i u, \tag{6.2}$$

或

$$\boldsymbol{U} = \text{grad}\,u = \boldsymbol{E}_i \partial_i u_{\circ} \tag{6.3}$$

现在对这种记法的合理性作出证明，即证明当进行坐标变换时，$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}_i \partial_i u$ 具有不变性：

$$\boldsymbol{E}_i \partial_i u = \boldsymbol{G}_{j'} \partial_{j'} u,$$

或者证明指标符号 $u_i = \partial_i u$ 符合矢量的解析定义(3.11)式

$$u_i = l_{ij'} u_{j'}{}_{\circ}$$

这是显然的，因为 $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 可写成 $\dfrac{\partial u}{\partial y_{j'}} \dfrac{\partial y_{j'}}{\partial x_i}$，而 $\dfrac{\partial y_{j'}}{\partial x_i} = l_{ij'}$。

（3）方向导数

场量 u 在点 m 附近的变化，可表现为沿各方向的方向导数。过 m 点沿选定方向 l 作一条有向直线，在线上取一点 m_1（图 6-2），记 $u(m_1) - u(m) = \Delta u$，$\overline{mm_1} = \Delta l$，则定义 $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ 的极限为 u 沿 l 方向的方向导数，记作

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}_{\circ} \tag{6.4}$$

图 6-2

它表示了 u 沿着 l 方向的变化率。u 沿不同方向的方向导数具有不同的值，现在来导出它们的计算式。

由点 m 到 m_1 的坐标增量设为 Δx_i，则

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i + O((\Delta l)^2),$$

因而

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta l},$$

式中的$\frac{\Delta x_i}{\Delta l}$正好是$l$方向与$\boldsymbol{E}_i$夹角的余弦。若记$l$方向的单位矢量为$\boldsymbol{L}$，则$\frac{\Delta x_i}{\Delta l}=\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{L}$，于是得

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x_i}\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{L}=\mathrm{grad}\,u\cdot\boldsymbol{L}, \qquad (6.5)$$

即u沿着l的方向导数等于u的梯度矢量在l方向的投影。

（4）自然导数

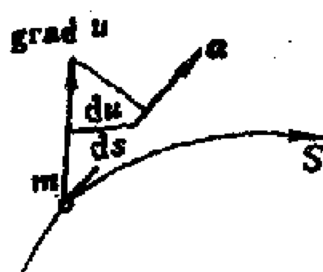


图 6-3

过m点取一条有向曲线S，其参数方程为$x_i=x_i(s)$（图 6-3），式中的s为由某固定起点计算的弧长，即自然参数。u沿着曲线的变化率可由其关于s的导数$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$表示，称为$u$沿曲线$S$的自然导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}s}\delta_{im}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x_i}\boldsymbol{E}_i\cdot\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{E}_m, \qquad (6.6)$$

式中$\frac{\partial u}{\partial x_i}\boldsymbol{E}_i=\mathrm{grad}\,u$是$u$的梯度；由(4.18)式知，$\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{E}_m=\boldsymbol{a}$是曲线$S$在$m$点的单位切矢。于是(6.6)式可写成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\mathrm{grad}\,u\cdot\boldsymbol{a}。 \qquad (6.7)$$

将此式与(6.5)式作比较可知，u沿曲线的自然导数等于沿曲线切线的方向导数：

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}。\tag{6.8}$$

(5) 标量场的几个性质

因为在等值面上u为常数，所以沿着等值面上的任何曲线，u的自然导数为0。用(6.7)式可以说明u的梯度与u的等值面垂直。沿着u的梯度的方向，u的方向导数取极大值，且等于grad$u$的模；沿着等值面的切线方向，u的方向导数为0。

利用梯度与等值面垂直这一性质，可计算任意曲面的法矢量$\boldsymbol{N}$：设曲面方程为$f(x_1, x_2, x_3)=0$，可以假想它是标量场$u=f(x_1, x_2, x_3)$的一个等值面，其梯度矢量为$u_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$，将它除以梯度矢量的模，得一个单位矢，即为曲面的单位法矢，其计算式为

$$n_i=\frac{u_i}{(u_s u_s)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\partial_i f}{(\partial_s f \partial_s f)^{\frac{1}{2}}}。\tag{6.9}$$

此法矢指向曲面的哪一边，取决于方程$f(x_1, x_2, x_3)$的形式。

§6.3 矢量场

矢量场可以用抽象符号表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3),$$

或用指标符号表示为

$$a_i=a_i(x_1, x_2, x_3)。$$

(1) 矢量线

矢量场可以形象地用矢量线来描绘。矢量线是这样的几何曲线，其上每一点的矢量$\boldsymbol{A}$都与该线相切(图 6-4)。设矢量线的参数方程为$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(t)$，则必须满足：

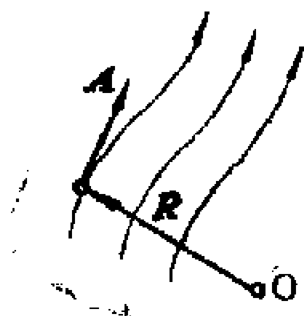


图 6-4

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{A}=0,$$

即

$$e_{ijk}\mathrm{d}x_i a_j=0。\qquad(6.10)$$

用 e_{rsk} 乘上式并用 E-D 公式展开，得到

$$a_r\mathrm{d}x_s=a_s\mathrm{d}x_r。\qquad(6.11)$$

上式包括 9 个方程，因为关于 s、r 对称，9 个方程中有 3 个是重复的；此外还有 $s=r$的 3 个方程是恒等式，这样就只剩下了 3 个方程，它们为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{a_2}=\frac{\mathrm{d}x_3}{a_3},\qquad(6.12)$$

其中只有 2 个方程是独立的。(6.12)式可解释为 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 平行。

(2) 矢量场的梯度

定义 $$b_{ij}=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}=\partial_i a_j,\qquad(6.13)$$

现在证明它是二阶张量。因为 a_j 是矢量，所以

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}(l_{jk'}a_{k'})=l_{jk'}\frac{\partial a_{k'}}{\partial y_{m'}}\frac{\partial y_{m'}}{\partial x_i}$$

$$=l_{im'}l_{jk'}\partial_{m'}a_{k'},$$

即

$$b_{ij}=b_{im'}l_{jk'}b_{m'k'},$$

符合二阶张量的定义。$b_{ij}=\partial_i a_j$ 称为矢量 a_j 的梯度，它的抽象符号和并矢符号为

$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{A}=\widetilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{E}_i\partial_i\boldsymbol{A}=\partial_i a_j\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j。\tag{6.14}$$

从这里我们看到了将 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 记作 ∂_i 的好处是，并矢符号指标排列的次序显得很有规律。

如果将 b_{ij} 的 9 个分量写成矩阵：

$$(b_{ij})=\begin{pmatrix}\partial_1 a_1 & \partial_1 a_2 & \partial_1 a_3\\ \partial_2 a_1 & \partial_2 a_2 & \partial_2 a_3\\ \partial_3 a_1 & \partial_3 a_2 & \partial_3 a_3\end{pmatrix},$$

它们就全面描述了 $\boldsymbol{A}$ 沿着 3 个方向的变化率。

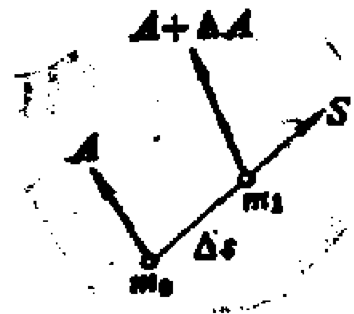


图 6-6

(3) 方向导数

设场点向 S 方向移动 Δs 距离，由点 m_0 变动到 m_1 时，场量 $\boldsymbol{A}$ 的增量是 $\Delta\boldsymbol{A}$，则定义极限

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial s}=\lim_{m_1\to m_0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta s}\tag{6.15}$$

为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在点 m_0 沿 S 方向的方向导数，它是一个矢量。与§6.2(3)的分析相同，可知它的计算式为

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial s}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_i}s_i,\tag{6.16}$$

即
$$\frac{\partial a_j}{\partial s}=s_i\partial_i a_j,\tag{6.17}$$

式中的 s_i 为沿 S 方向的单位矢量。如果用 $s_i=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}_i$ 和 $\boldsymbol{A}=a_j\cdot\boldsymbol{E}_j$ 代入(6.16)式，则得并矢符号为

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial s}=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j\partial_i a_j=\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}} \tag{6.18}$$

即矢量$\boldsymbol{A}$沿S的方向导数等于梯度$\widetilde{\boldsymbol{B}}$左边点乘以单位矢量$\boldsymbol{S}$。

(4) 微分运算

由场点位置改变$\mathrm{d}\boldsymbol{R}$而引起场量$\boldsymbol{A}$的微分可写作

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_s}\mathrm{d}x_s,\quad 或\quad \mathrm{d}a_i=\mathrm{d}x_s\partial_s a_i, \tag{6.19}$$

记$\mathrm{d}x_s=\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{E}_s$并考虑到(6.14)式，则又可将(6.19)式写成：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{E}_s\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_s}=\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}}, \tag{6.20}$$

即矢量$\boldsymbol{A}$的微分等于$\mathrm{d}\boldsymbol{R}$右边点乘以$\boldsymbol{A}$的梯度$\widetilde{\boldsymbol{B}}$。

(6.20)式还可以推广用于$\boldsymbol{A}$是任意阶张量的情况，即

$$\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{grad}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}, \tag{6.21}$$

式中的$\mathrm{grad}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{E}_s\dfrac{\partial \widetilde{\boldsymbol{A}}}{\partial x_s}$为$\widetilde{\boldsymbol{A}}$的梯度，它是比$\widetilde{\boldsymbol{A}}$高一阶的张量。

(5) 矢量场的散度(divergence)和旋度(rotatin or curl)

矢量场$\boldsymbol{A}$的梯度$\widetilde{\boldsymbol{B}}$是最重要的导出量，它表达了$\boldsymbol{A}$在场点附近的变化的线性部分。知道了梯度$\widetilde{\boldsymbol{B}}$，便容易计算$\boldsymbol{A}$的方向导数，也容易计算$\boldsymbol{A}$的微分。

$\widetilde{\boldsymbol{B}}$是二阶张量，它的缩并为一个标量，称为$\boldsymbol{A}$的散度；它的反对称对偶为一个矢量，称为$\boldsymbol{A}$的旋度。散度的表达式为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\partial_s a_s, \tag{6.22}$$

它的几何解释将在下一章中讨论。

矢量$\boldsymbol{A}$的旋度的表达式为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_k e_{ijk}\partial_i a_j, \qquad (6.23)$$

或用指标符号写成

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_k=e_{ijk}\partial_i a_j。 \qquad (6.24)$$

旋度代表了梯度$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的反对称部分，下面先给它以一种解释，更详细的解释将在下一章中进行。

设刚体以角速度$\boldsymbol{\Omega}$绕坐标原点旋转，则其速度分布为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R},$$

或

$$a_j=e_{jmn}\omega_m x_n,$$

将它们代入(6.24)式求$\boldsymbol{A}$的旋度，得

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_k=e_{ijk}e_{jmn}\omega_m\delta_{in}=2\omega_k。$$

即在这种情况下，速度场的旋度等于旋转角速度的2倍。

§6.4 矢量微分算子∇

(1) 定义

在上一节中我们已经看到：由标量场u可以导出一个矢量场$\mathrm{grad}\,u=\boldsymbol{E}_i\partial_i u$；由矢量场$\boldsymbol{A}$可以导出一个二阶张量场$\mathrm{grad}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_i\partial_i\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j\partial_i a_j$。由此引伸，可以定义一个算子

$$\nabla=\boldsymbol{E}_i\partial_i, \qquad (6.25)$$

它具有矢量($\boldsymbol{E}_i$)和微分(∂_i)的双重运算作用，称为Hamilton算子，读作“nabla”或“del”。∇的最为重要的性质在于它的不变性，即不因坐标变换而改变形式，现在对此作出证明：由(3.2)式知

$$\boldsymbol{E}_i=l_{ij'}\boldsymbol{G}_{j'}=\boldsymbol{G}_{j'}\frac{\partial x_i}{\partial y_{j'}},$$

所以

$$\boldsymbol{E}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \boldsymbol{G}_{j'} \frac{\partial x_i}{\partial y_{j'}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \boldsymbol{G}_{j'} \frac{\partial}{\partial y_{j'}}。$$

此式说明 $\nabla = \boldsymbol{E}_i \partial_i = \boldsymbol{G}_{j'} \partial_{j'}$ 确为不变性算子，因此可用它对不变量（抽象符号或并矢符号）进行运算，所得到的结果仍为不变量。

（2）梯度、散度、旋度

设 u 为标量，则 $\nabla u = \boldsymbol{E}_i \partial_i u = \boldsymbol{E}_i u_i$ 为矢量，即 u 的梯度。

对于矢量 $\boldsymbol{A} = a_j \boldsymbol{E}_j$，可作下列运算：$\nabla \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_j \partial_i a_j$ 为二阶张量，即 $\boldsymbol{A}$ 的梯度；$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_j \partial_i a_j = \partial_i a_i$ 为标量，即 $\boldsymbol{A}$ 的散度；$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_i \times \boldsymbol{E}_j \partial_i a_j = \boldsymbol{E}_k e_{ijk} \partial_i a_j$ 为矢量，即 $\boldsymbol{A}$ 的旋度。

设 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = b_{ij} \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_j$ 为二阶张量，则 $\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E}_k \cdot \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{E}_j \partial_k b_{ij} = \boldsymbol{E}_j \partial_i b_{ij}$ 为矢量，称为 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的散度。

上面诸例可以归纳成

$$\nabla \widetilde{\boldsymbol{A}} = \mathrm{grad}\, \widetilde{\boldsymbol{A}}, \quad \nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{A}} = \mathrm{div}\, \widetilde{\boldsymbol{A}}, \quad \nabla \times \widetilde{\boldsymbol{A}} = \mathrm{rot}\, \widetilde{\boldsymbol{A}},$$

分别称为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的梯度、散度和旋度。这里的 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 已不限于矢量，它可以是二阶或高阶张量，也可以是标量；但标量只有梯度，没有散度和旋度。

定义了不变性的矢量微分算子 $\nabla = \boldsymbol{E}_i \partial_i$，就可用它对任意阶张量作运算，从数学上说，没有其他限制。但在实际上，张量运算总是有物理背景的，例如上面介绍了二阶张量的散度，它的背景就是单元体上应力合力的计算。

（3）运算规则

∇ 具有矢量和求偏导的双重性质，在运算时，既要遵循矢

量运算规则，又要遵循求偏导数的规则。这里有一条重要的规定，即求导的运算只作用于符号 ∇ 后面的量，而不影响 ∇ 前面的量。例如 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}\cdot\nabla$，从矢量运算来看，两者相等，从求导运算来看，两者则不同：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\partial_s a_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的散度；而 $\boldsymbol{A}\cdot\nabla=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_s\partial_s=a_s\partial_s$ 仍为一算子。又例如

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}=a_s\partial_s\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_j a_s\partial_s b_j,$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_j b_j\partial_s a_s,$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}_k\partial_j(a_j b_k)=\boldsymbol{E}_k(b_k\partial_j a_j+a_j\partial_j b_k),$$

三者显然不相等，但是单从矢量运算规则来看，三者是相同的。再例如 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ 和 $(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$，从矢量运算来看，两者相等；但是从求导规则来看则两者不同，前者要对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都求导，后者仅对 $\boldsymbol{A}$ 求导。在这里矢量运算规则与求导数的运算发生了矛盾，要特别注意。正确的关系应该为

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})。$$

再例如 $\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$ 和 $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$，从矢量运算来看，两者相等，但是从求导运算来看就完全不对了；前者仅对 $\boldsymbol{B}$ 求导，后者的两项都要对 $\boldsymbol{A}$ 求导，所以这两者是不同的。正确的关系应该为

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=(\nabla\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\boldsymbol{B})。\qquad(6.26)$$

上式中的 $\nabla\boldsymbol{B}$ 是并矢，即 $\boldsymbol{B}$ 的梯度；最后一项还可以写成 $\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$。

为了慎重起见，最好再用指标符号对(6.26)式进行验算：

等式左边 $=\boldsymbol{E}_i\times(\boldsymbol{E}_j\times\boldsymbol{E}_k)a_i\partial_j b_k=\boldsymbol{E}_s a_i(\partial_s b_i-\partial_i b_s)$,

等式右边 $=\partial_j b_i\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j\partial_i b_j$

$\qquad=\boldsymbol{E}_j a_i(\partial_j b_i-\partial_i b_j)$,

故(6.26)式无误。

(4) 常用算式

按照上一节介绍的关于 ∇ 的运算规则，对于标量 u、v 和矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，可列出常用算式如下：

$$\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v,$$

$$\nabla*(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla*\boldsymbol{A}\pm\nabla*\boldsymbol{B},$$

式中的*可以是点乘、叉乘或是并乘。

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u,$$

$$\nabla*(u\boldsymbol{A})=u\nabla*\boldsymbol{A}+(\nabla u)*\boldsymbol{A},$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\nabla\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}+(\nabla\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B},$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}),$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})-\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\\&=(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\\&\quad-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B},\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot\nabla u=\nabla^2 u,$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A},$$

式中 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\partial_i\partial_i$ 称为 Laplace 算子；$\nabla\nabla=\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j\partial_i\partial_j$。

若矢量 $\boldsymbol{A}$ 写成标量 u 的函数，u 是 x_i 的函数，则

$$\nabla*\boldsymbol{A}(u)=\nabla u*\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}。\tag{6.27}$$

以上各常用算式，均可由并矢符号 $\nabla*=\boldsymbol{E}_i*\partial_i$ 推出。

(5) 正交曲线坐标系

算子 ∇ 具有不变性，即不依赖于坐标。正如它可以在直角坐标中写成 $\nabla=\boldsymbol{E}_i\partial_i$ 一样，它也可以在曲线坐标中展开。这里我们介绍在正交曲线坐标系 $\{q_i\}$ 中 ∇ 的表达式：

$$\nabla=\frac{\boldsymbol{G}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\boldsymbol{G}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{\boldsymbol{G}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3},\tag{6.28}$$

式中的 $\boldsymbol{G}_i$ 为沿坐标 q_i 方向的单位矢量，$h_i=\dfrac{|\partial R|}{\partial q_i}$ 为坐标 q_i 的 Lame 系数。

对于圆柱坐标系（图 6-6）有

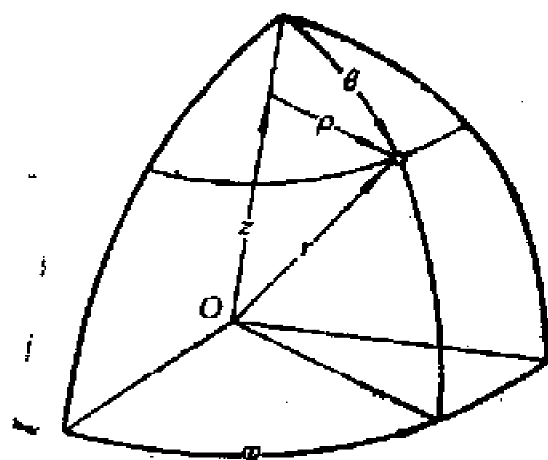


图 6-6

$$\nabla=\boldsymbol{G}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{G}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\boldsymbol{G}_z\frac{\partial}{\partial z},\qquad(6.29)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}。$$

对于球坐标系（图 6-6），有

$$\nabla=\boldsymbol{G}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{G}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{G}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\qquad(6.30)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}。\qquad(6.31)$$

习 题 6

6.1 设 a_i 为矢量，证明 $\partial_j a_i$ 为二阶张量。

6.2 用算式 $\nabla * = \boldsymbol{E}_i * \partial_i$ 验算§6.4(4)中的常用算式。

6.3 用算式 $\nabla * = \boldsymbol{E}_i * \partial_i$ 验算下列各式：

(a) $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)m\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\cdot\nabla m + m\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}$,

(b) $\boldsymbol{C}\cdot\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\nabla\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\nabla\boldsymbol{A})$,

(c) $\boldsymbol{C}\cdot\nabla(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{C}\cdot\nabla\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\cdot\nabla\boldsymbol{A})$,

(d) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{C})$。

6.4 计算下列各式，式中 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}_i x_i$ 为矢径，$r = |\boldsymbol{R}|$：

(a) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$,　　(b) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$,

(c) ∇r,　　(d) $\nabla\dfrac{1}{r}$

(e) $\nabla\cdot\boldsymbol{R}$,　　(f) $\nabla\times\boldsymbol{R}$

(g) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})$　　(h) $\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{R}$

(i) $(\boldsymbol{A}\times\nabla)\times\boldsymbol{R}$,　　(j) $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{R}}{r^3}$。

6.5 刚体绕坐标原点转动时的速度场和加速度场分别为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}\times\boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}),$$

式中的$\boldsymbol{\Omega}$和$\boldsymbol{K}$为常矢，$\boldsymbol{R}$为矢径。计算

(a) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}$，(b) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$，(c) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$，(d) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。

6.6 设$r = |\boldsymbol{R}|$为坐标点与原点的距离，已知 f 是 r 的函数，

(a) 若 $\mathrm{div}(\boldsymbol{R}f) = 0$，求 $f(r)$；

(b) 若 $\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ f = 0$，求 $f(r)$。

第七章　场论，积分运算

§7.1　矢量的环量(circulation)

(1) 矢量场中的线积分

质点受力 $\boldsymbol{A}$ 作用，移动位移为 $\Delta\boldsymbol{R}$ 时，力作的功是 $\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{R}$。若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$ 是质量力场，有一个单位质量的质点沿着曲线 C 运动（图 7-1），则力场做功为

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_k\cdot\Delta\boldsymbol{R}_k, \qquad (7.1)$$

式中 $\lambda=\max\Delta\boldsymbol{R}_k$。这种运算称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿着曲线 C 的（标积）线积分，它可以化为 3 个单变量 x_i 的定积分：

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\int_C a_s\mathrm{d}x_s=\int_C a_1\mathrm{d}x_1+\int_C a_2\mathrm{d}x_2+$$
$$+\int_C a_3\mathrm{d}x_3。 \qquad (7.2)$$

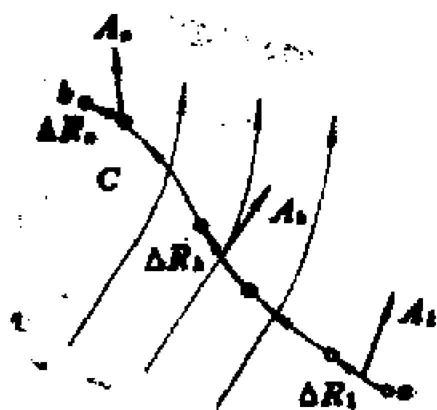


图 7-1

矢量场 a_i 一般都表示为 x_1，x_2，x_3 的函数，但是积分(7.2)式是沿着曲线 C 进行的，此时诸 x_i 中只能有 1 个独立变量，求 $\int_C a_1(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_1$ 时，x_1 是独立变量，而应视 x_2、x_3 为 x_1 的

函数；求$\int_C a_2(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2$时，则须将$x_1$，$x_3$表示为$x_2$的函数；……但是这样的做法是很不方便的，因此很少采用。较方便的做法是给出积分路线C的参数方程式$x_s=x_s(t)$，这样在此曲线上，矢量a_s也可写成t的函数$a_s[x_1(t),x_2(t),x_3(t)]=a_s(t)$，于是(7.2)式化为

$$\int_C a_s \mathrm{d}x_s=\int_{t(a)}^{t(b)} a_s(t)\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \tag{7.3}$$

式中的$t(a)$和$t(b)$分别对应于曲线C的起点和终点。定积分(7.3)不仅取决于C的形状，还取决于C的方向，显然

$$\int_{t(a)}^{t(b)} a_s\dot{x}_s \mathrm{d}t=-\int_{t(b)}^{t(a)} a_s\dot{x}_s \mathrm{d}t。$$

(2) 矢量场中的环量

当积分路线为封闭曲线时，上述矢量线积分称为环量，记作

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\oint_C a_s \mathrm{d}x_s。 \tag{7.4}$$

Γ的值取决于曲线C的形状及方向。一般说来，沿不同的封闭曲线，Γ会有不同的值。现在我们讨论这样一种特殊情况：即无论封闭曲线取什么形状，环量Γ恒为0，例如，当$\boldsymbol{A}$是保守力场时，若将封闭曲线分成acb和bea两段（图7-2），则

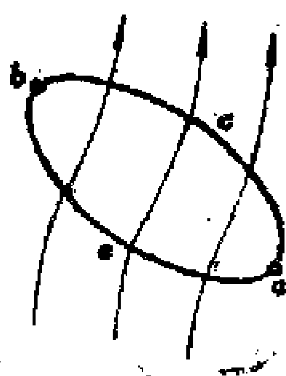


图 7-2

$$\Gamma=\int_{acb}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=-\int_{bea}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=0,$$

即

$$\int_{acb}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=-\int_{bea}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\int_{aeb}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}。 \tag{7.5}$$

(7.5)式表明，从点 a 到 b 的线积分与积分路线无关。在这种情况下若将 a 点固定，则积分(7.5)仅是 b 点位置的函数，可写成：

$$\int_a^b \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R}=\varphi(b)+c, \qquad (7.6)$$

式中的 c 为选定的一个任意常数，显然 $c=-\varphi(a)$。φ 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的势函数，若 $\boldsymbol{A}$ 为力，则 $-\varphi$ 为势能。

并不是任何矢量场都有势函数的。环量为 0 是存在势函数的充分条件，对于单连通空间，它也是必要条件，关于这一点将在§7.5中加以讨论。

§7.2 矢量的通量(flux)

定义下述面积分为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在曲面 S 上的通量：

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}s=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_k\cdot\boldsymbol{N}_k\Delta s_k, \qquad (7.7)$$

式中 $\lambda=\max\Delta s_k$。此积分为一标量，其数值取决于面 s 的形状以及所选取法矢量 $\boldsymbol{N}$ 的方向。我们也可将 $\boldsymbol{N}\mathrm{d}s$ 写成 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{N}\mathrm{d}s$，为面元矢量，则通量的表达式为

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S a_i\mathrm{d}s_i, \qquad (7.8)$$

式中的 $\mathrm{d}s_i$ 为面元矢量的指标符号，$\mathrm{d}s_i=\boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，而且 $\mathrm{d}s_1=\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$（图 7-3），即

$$\mathrm{d}s_i=e_{ijk}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k。 \qquad (7.9)$$

视 $\boldsymbol{A}$ 为流体的速度场，则通量 $\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是单位时间穿过 $\mathcal{S}$

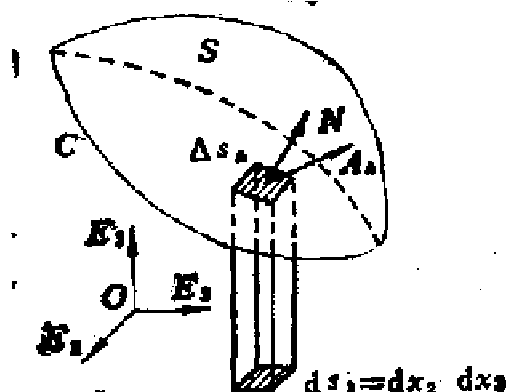


图 7-3

面的流体体积，即流量。当流体是从曲面的$-N$一侧流向N一侧时，流量为正值。如果A是不可压缩流体连续流动的速度场，则通量仅取决于曲面的边界C而与曲面的具体形状无关。

§7.3 Green积分转换公式(广义Gauss公式)

(1) 广义Gauss 公式

我们来讨论面积分与体积分的转换关系。设f是R的函数，它可以是1个标量，也可以是某张量的1个分量。设$f\in C^1$，现在要计算f在封闭曲面$S+\Sigma$上的面积分

$$\iint_{S+\Sigma} f\,d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}_i\oiint f\,ds_i, \qquad (7.10)$$

$d\boldsymbol{S}$是取闭曲面的外法线方向(图 7-4)，而$ds_i=e_{ijk}dx_jdx_k$，式表明，求f的矢性曲面积分归结为求3个二重标量积分。

现在先来讨论$\oiint f\,ds_1$，我们按下面的办法来将闭曲面分成S和Σ两部分：即S和Σ分界线在坐标面Ox_2x_3上的正投影，恰

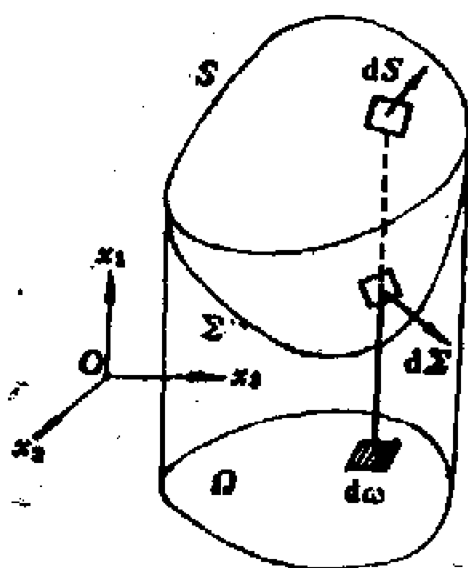


图 7-4

是闭曲面在 Ox_2x_3 面上正投影Ω的边界；$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$与$\boldsymbol{E}_1$构成锐角，$\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$与$\boldsymbol{E}_1$构成钝角；因此$\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}\omega$，$\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}=-\mathrm{d}\omega$。于是

$$\oint\!\!\!\oint_{S+\Sigma} f\,\mathrm{d}s_1=\iint_{\Omega}[f(S)-f(\Sigma)]\mathrm{d}\omega$$

$$=\iint_{\Omega}\left[\int_{x_1(\Sigma)}^{x_1(S)}\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\iiint_V\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}V, \qquad (7.11)$$

同理可得

$$\oint\!\!\!\oint_S f\,\mathrm{d}s_i=\iiint_V\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}V\text{。} \qquad (7.12)$$

这就是将面积分化为体积分的 Green 转换公式，或称广义 Gauss 公式，式中的 f，也可以是带指标的任何张量。

显然，(7.12)式中的 f 可以代之以张量的抽象符号$\widetilde{\boldsymbol{F}}$即

$$\oint\!\!\!\oint\widetilde{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}s_i=\iiint\partial_i\widetilde{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}V\text{。}$$

将等式两端以 $\boldsymbol{E}_i*$乘之，并注意到 $\boldsymbol{E}_i\mathrm{d}s_i=\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{E}_i*\partial_i=\nabla*$，则可以得到抽象符号的 Green 转换公式：

$$\oint\!\!\!\oint\mathrm{d}\boldsymbol{S}*\widetilde{\boldsymbol{F}}=\iiint\nabla*\widetilde{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}V, \qquad (7.13)$$

式中的*可以是点乘、叉乘或并乘。

(2) 梯度定理

当$\widetilde{\boldsymbol{F}}$是标量时，(7.13)式可写成：

$$\oiint f\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint \mathrm{grad} f \mathrm{d}V。$$

令积分区域为 ΔV，上式右端的 $\mathrm{grad} f$ 用它的中值取代，提至积分符号之外，再令 ΔV 趋近于0，便得

$$\mathrm{grad} f=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint f\mathrm{d}\boldsymbol{S}。\qquad(7.14)$$

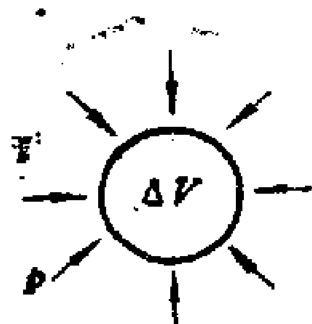


图 7-5

这就是用抽象符号给出的 f 的梯度的定义，可以这样来理解：设想 p 代表流体的压强场。在流体内部取单元体 ΔV 作为分离体（图 7-5），则它受到的压力合力为 $-\oiint p\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，亦即 $-\mathrm{grad}\, p\Delta V$。单元体受力是由于 p 分布不均匀引起的，且指向 p 减小的方向；由此可知，$\mathrm{grad}\, p$ 代表了 p 的不均匀程度，指向 p 增大的方向。

（3） 散度定理

当(7.13)式中的 $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ 为矢量，$*$为点乘时，它变为

$$\oiint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}=\iiint \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V。\qquad(7.15)$$

相应的(7.12)式变为

$$\oiint f_i \mathrm{d}s_i=\iiint \partial_i f_i \mathrm{d}V。\qquad(7.16)$$

这就是常用的 Gauss 散度定理。和(2)的梯度定理相同，可以定义

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}。\qquad(7.17)$$

上式也可以有直观的几何解释，若视 $\boldsymbol{F}$ 为流体的速度场，则等

式右端的通量积分代表净流出此封闭曲面的流量。若$\boldsymbol{F}$代表的是不可压缩的连续流动，则此净流量应为0，即$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$；反之，若 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}>0$，则说明有流体从闭曲面中不断流出来，流体在“发散”。这就是散度一词的含义。

散度处处为0的矢量场，称为无源场或管式场(solenoidal field)。

(4) Green 第一公式和第二公式

应用散度定理(7.15)式，可以导出在求解 Laplace 方程时甚为有用的 Green 第二公式：设 φ 和 ψ 是两个标量函数，令 $\boldsymbol{F}=\varphi\nabla\psi$ 代入(7.15)式，并注意到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot(\varphi\nabla\psi)=\nabla\varphi\cdot\nabla\psi+\varphi\nabla^2\psi,$$

便得到 Green 第一公式：

$$\oiint\varphi\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi+\varphi\nabla^2\psi)\,\mathrm{d}V。\qquad(7.18)$$

将上式的 φ 与 ψ 互换，得到一个新的公式，与上式相减，便得到 Green 第二公式：

$$\oint(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$=\iiint(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\,\mathrm{d}V。\qquad(7.19)$$

上式左端中的标积可写成

$$\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\nabla\psi\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}S=\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

和 $$\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

于是得

$$\oiint\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iiint(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V。\tag{7.20}$$

它与(7.19)式等价，但是被积函数均已化为标量，$\frac{\partial}{\partial n}$是沿$S$面外法线方向的方向导数。

§7.4 Kelvin积分转换公式(广义Stokes公式)

(1) Kelvin 公式

考虑场量f沿有向封闭曲线C的矢性线积分$\oint_C f\mathrm{d}\boldsymbol{R}$（图7-6）。若以$C$为边界，作一任意曲面$S$，则 Kelvin 公式可

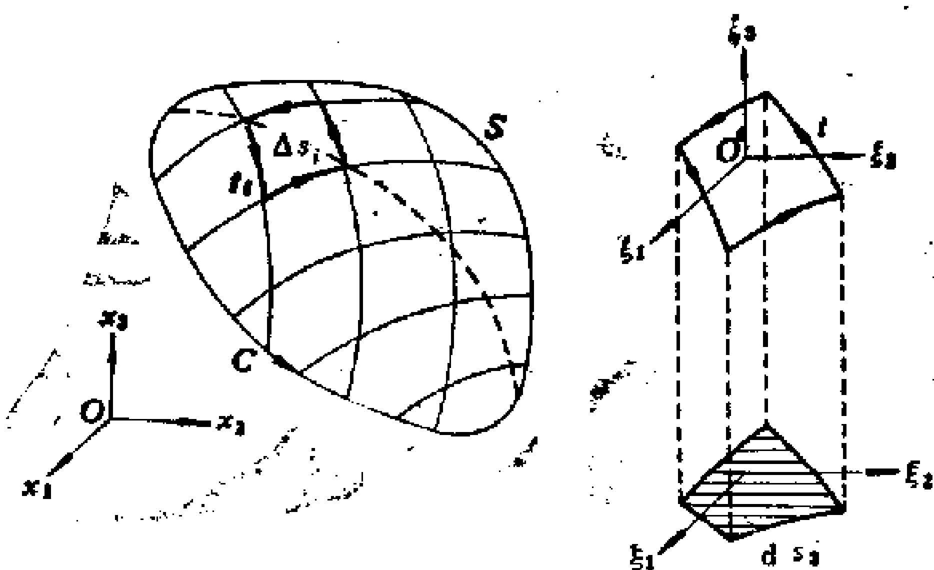


图 7-6

将沿C的线积分化为S上的面积分。下面我们采用比较直观的方法来推导 Kelvin 公式：

用曲线网格将曲面S分割成n小块$\Delta S_i(i=1,\cdots,n)$，每小块的边界线为t_i。若沿着每个小块的边界线作线积分$\oint_{t_i} f\mathrm{d}\boldsymbol{R}$，然后将它们全部加起来，则线积分在网格线上的部分都抵消掉了，相加得到的结果是沿着闭曲线C的线积分，即

$$\oint_C f\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\oint_{t_i} f\mathrm{d}\boldsymbol{R}。\tag{7.21}$$

现在来讨论沿小块边界t_i的线积分，在小块面上任取一原点O'，建立局部坐标系$\{\xi_i\}$与$\{x_i\}$平行，则$\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}_i\mathrm{d}x_i=\boldsymbol{E}_i\mathrm{d}\xi_i$。将场量在原点$O'$展开为

$$f=f(O')+(\partial_k f)_{O'}\xi_k+O(\xi_k^2),$$

则

$$\oint_t f\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}_i\oint_t f\mathrm{d}\xi_i,$$

而

$$\oint_t f\mathrm{d}\xi_i=f(O')\oint_t \mathrm{d}\xi_i+(\partial_k f)_{O'}\oint_t \xi_k\mathrm{d}\xi_i+O(\xi_k^3)。$$

上式右端的第一项$\oint_t \mathrm{d}\xi_i=0$；加密曲面上的网格，令$n\to\infty$，$\Delta S\to 0$，则可略去上式中的最后一项$O(\xi_k^3)$，于是

$$\lim_{\Delta S\to 0}\oint_t f\mathrm{d}\xi_i=(\partial_k f)_{O'}\oint_t \xi_k\mathrm{d}\xi_i。\tag{7.22}$$

现在对i，k取具体值来分析线积分$\oint\xi_k\mathrm{d}\xi_i$：

$$\oint\xi_1\mathrm{d}\xi_1=\oint\mathrm{d}\left(\frac{\xi_1^2}{2}\right)=0,\quad \oint\xi_1\mathrm{d}\xi_2=\mathrm{d}s_3,$$

$$\oint\xi_2\mathrm{d}\xi_1=-\mathrm{d}s_3,$$

依此类推，可得

$$\oint_{t} \xi_k \mathrm{d}\xi_i = e_{kij}\mathrm{d}s_j, \qquad (7.23)$$

这里 $\mathrm{d}s_j$ 是面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 沿 $\boldsymbol{E}_i$ 的分量，而矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向是这样规定的：从它的终点向始点看去，积分路线 t 为逆时针的封闭周线。

将(7.23)式代入(7.22)式，得

$$\lim_{\Delta S\to 0}\oint_{t} f\mathrm{d}\xi_i = e_{ijk}\mathrm{d}s_j\partial_k f,$$

再代入(7.21)式，得

$$\oint_C f\mathrm{d}x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\oint_{t_k} f\mathrm{d}\xi_i$$

$$= \iint_S e_{ijk}\mathrm{d}s_j\partial_k f。\qquad (7.24)$$

这就是将线积分化为面积分的 Kelvin 公式，式中的 f 可以是标量，也可以是任意阶张量的指标符号。这个公式的形式比较复杂。将它化为抽象符号较为整齐，便于记忆：以 $\boldsymbol{E}_i *$ 乘公式的两端，并用 $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ 代替 f，注意到 $\boldsymbol{E}_i\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{E}_i e_{ijk} = \boldsymbol{E}_j\times\boldsymbol{E}_k$，便有

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{R}*\widetilde{\boldsymbol{F}} = (\boldsymbol{E}_j\times\boldsymbol{E}_k)*\iint \mathrm{d}s_j\partial_k\widetilde{\boldsymbol{F}},$$

因为 $\boldsymbol{E}_j\mathrm{d}s_j = \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{E}_k\partial_k = \nabla$，于是可得

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{R}*\widetilde{\boldsymbol{F}} = \iint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)*\widetilde{\boldsymbol{F}}, \qquad (7.25)$$

这就是用抽象符号表示的 Kelvin 公式。

(2) Stokes 环量定理

Stokes 公式是 Kelvin 公式的一个特例。令(7.25)式中的 $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ 为矢量，$*$ 为点乘，并注意到

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{F},$$

便得到

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{F}。\qquad (7.26)$$

此式左端为矢量$\boldsymbol{F}$沿封闭曲线C的环量，右端是旋度rot$\boldsymbol{F}$穿过曲面S的通量，称为$\boldsymbol{F}$的涡通量。(7.26)式表明：涡通量等于环量，它仅与曲面的边界线C有关而与曲面S的形状无关，此称为Stokes环量定理。

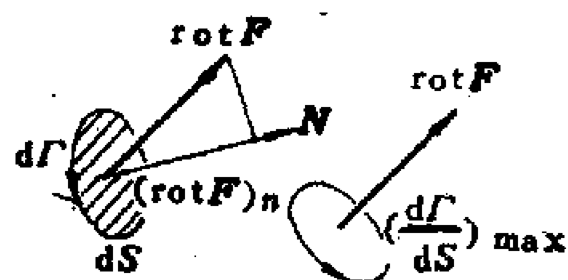


图 7-7

(3) 旋度的性质

在矢量场中取一个面元矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{N}\mathrm{d}S$，面元周线上的环量为$\mathrm{d}\Gamma$（图7-7），$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}$称为环量面密度。由Stokes定理知：

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}=\boldsymbol{N}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{F},$$

即环量面密度与面元法矢量的方向有关，当它与旋度rot$\boldsymbol{F}$方向一致时，$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}$有极大值，且

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S}\right)_{\max}=|\mathrm{rot}\boldsymbol{F}|。$$

或者换一种说法：旋度等于环量面密度的极大值，并与此时面元法矢的方向一致。

由广义Gauss公式(7.13)，还可以给旋度一个定义：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{F}。\qquad (7.27)$$

若取 ΔV 为一圆球（图 7-8），

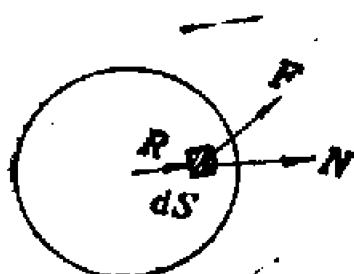


图 7-8

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$ 而

$$d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{F}dS=\frac{\boldsymbol{R}}{r}\times\boldsymbol{F}dS,$$

则

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\lim_{r\to0}\frac{3}{4\pi r^4}\iint_S\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}dS。\tag{7.28}$$

视 $\boldsymbol{F}$ 为速度，dS 为薄球壳面元的质量，则 $\iint_S\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}dS$ 为薄球壳对球心的动量矩，而薄球壳绕球心轴的转动惯量为 $\frac{8}{3}\pi r^4$，所以(7.28)式可以解释为 2 倍动量矩除以转动惯量，即球壳平均角速度的 2 倍。

§7.5 无旋场

(1) 无旋和有势

如果矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ 处处为 0，则称此矢量场为无旋场。由 Stokes 定理知，在无旋场 $\boldsymbol{A}$ 中的环量 $\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}$ 亦处处为 0。根据§7.2(2)关于环量的讨论，可以知道此时线积分 $\int_{R_0}^{R}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}$ 与积分路线无关，从而可以定义出一个标量函数

$$\varphi(\boldsymbol{R})=\int_{R_0}^{R}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{R}+\varphi(\boldsymbol{R}_0),\tag{7.29}$$

式中 $\varphi(\boldsymbol{R}_0)$的值，可以任意选定。

现在我们来讨论 φ 与 $\boldsymbol{A}$的微分关系。若场点$\boldsymbol{R}$变动 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$，从m点变到 m_1 点（图7-9），则据(6.19)式，φ 的微分为

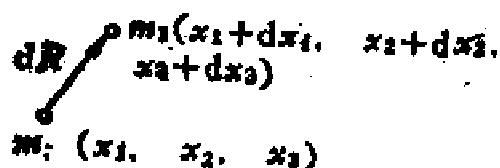


图 7-9

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi&=\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\nabla\varphi\\&=\mathrm{d}x_i\partial_i\varphi。\end{aligned}$$

又根据 φ 的定义(7.29)式知

$$\mathrm{d}\varphi=\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R}=a_i\mathrm{d}x_i。$$

由此可得

$$(\partial_i\varphi-a_i)\mathrm{d}x_i=0。\qquad(7.30)$$

由于从m点变动到 m_1 点是任意的，可以取 $\mathrm{d}x_1\neq0$，$\mathrm{d}x_2=\mathrm{d}x_3=0$，则得 $\partial_1\varphi-a_1=0$，同理可得 $\partial_2\varphi-a_2=0$和$\partial_3\varphi-a_3=0$，即

$$\partial_i\varphi=a_i,\qquad \mathrm{grad}\,\varphi=\boldsymbol{A}。\qquad(7.31)$$

上式表明，$\boldsymbol{A}$是 φ 的梯度。我们称 φ 是$\boldsymbol{A}$的势，称 $\boldsymbol{A}$ 为有势场或梯度场。无旋场一定是有势场。还可以证明，有势场也一定是无旋场，这是因为：如果 $\boldsymbol{A}$有势，$a_j=\partial_j\varphi$，则 $\boldsymbol{A}$ 的旋度可表示为

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_k=e_{ijk}\partial_i a_j=e_{ijk}\partial_i\partial_j\varphi,$$

而 $\partial_i\partial_j\varphi$ 关于 i、j 对称，因此 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$。

由以上分析可知，无旋和有势互为充要条件，无旋场和有势场是等价的。通常认为(7.31)式是势函数 φ的定义，则(7.29)式表明，只要$\boldsymbol{A}$无旋，φ 是存在的。容易证明，在允许相差一个任意常数的条件下，势函数是唯一的。事实上，设 φ 和 ψ 都是$\boldsymbol{A}$的势函数，$\nabla\varphi=\nabla\psi=\boldsymbol{A}$，则 $\partial_i(\varphi-\psi)=0$，$\varphi-\psi=c$（常数）。

有势场$\boldsymbol{A}$可以用势函数φ完全描述，将矢量场化为标量场来处理，这在数学上有极大的方便。

例 7.1 已知矢量场为

$$a_x=y^2-z^2,\quad a_y=2xy+z,\quad a_z=-2xz+y。$$

它是否有势？若为有势场，求势函数φ。

解 先计算矢量场的旋度：

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_x=\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}=1-1=0,$$

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_y=\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}=-2z-(-2z)=0,$$

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_z=\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=2y-2y=0,$$

故此为无旋场，现在求势函数φ。

方法 1 写出全微分形式的$\mathrm{d}\varphi$：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi&=a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z\\&=(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2xy+z)\mathrm{d}y+(y-2xz)\mathrm{d}z\\&=y^2\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}(y^2)+z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}(z^2)\\&=\mathrm{d}(xy^2-xz^2+yz),\end{aligned}$$

所以

$$\varphi=x(y^2-z^2)+yz+c。$$

方法 2 由$a_x=y^2-z^2=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$，可得

$$\varphi=x(y^2-z^2)+f(y,z),$$

式中$f(y,z)$为待求函数。令$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=a_y$，得

$$2xy+\frac{\partial f}{\partial y}=2xy+z,$$

所以

$$f=yz+g(z),\quad \varphi=x(y^2-z^2)+yz+g(z),$$

式中的 $g(z)$为待求函数。令$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=a_z$，得

$$-2xz+y+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}=-2xz+y,$$

所以

$$g=c,\qquad \varphi=x(y^2-z^2)+yz+c,$$

式中的 c 为任意常数。

方法 3 $\varphi=\int_C a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z$ 是一个线积分，而积分路径可以任意选择。我们可以规定一条简单的积分路线，它由 3 段直线组成，第一段从 $a(0,0,0)$到 $b(x,0,0)$，则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0$；第二段从 $b(x,0,0)$到 $c(x,y,0)$，则 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x=0$；第三段从 $c(x,y,0)$到 $\mathrm{d}(x,y,z)$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=0$，于是

$$\begin{aligned}\varphi&=\int_a^b a_x\mathrm{d}x+\int_b^c a_y\mathrm{d}y+\int_c^d a_z\mathrm{d}z+c\\&=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y 2xy\mathrm{d}y+\int_0^z(-2xz+y)\mathrm{d}z+c\\&=xy^2-xz^2+yz+c。\end{aligned}$$

在以上求 φ的 3 种方法中，采用第三种方法要特别谨慎；因为它是一个线积分，对于无旋场来说此线积分与积分路径无关，可以由它求出势函数。如果矢量场有旋无势，也能算出一个线积分来，但那将不是势函数。

(2) 调和场

有一种矢量场 $\boldsymbol{A}$，它不仅无旋（$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$），而且无源（$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$），这种矢量场称为调和场(harmonic field)。$\boldsymbol{A}$无旋，故有势，$\boldsymbol{A}=\nabla\varphi$。$\boldsymbol{A}$无源，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，所以

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi=0,$$

即

$$\partial_i\partial_i\varphi=0。$$

此式称为 Laplace 方程。满足 Laplace 方程的函数变化缓和，在定义域内没有极值，故称为调和函数。求解调和场的问题，就归结为在给定的边界条件下求解 Laplace 方程了。

习 题 7

7.1 求 2 维矢量场

$$\boldsymbol{A}=(x_1x_2+1)\boldsymbol{E}_1+\left(\frac{1}{2}x_1^2+x_1+2\right)\boldsymbol{E}_2$$

沿圆周线 $x_1^2+x_2^2=a^2$ 的环量 Γ。

7.2 求矢量

$$\boldsymbol{A}=4x_1x_3\boldsymbol{E}_1-x_2^2\boldsymbol{E}_2+x_2x_3\boldsymbol{E}_3$$

穿出图7-10所示单位立方体表面的通量。

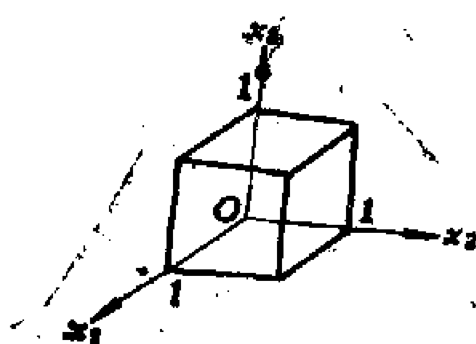


图 7-10

7.3 在矢量场

$$\boldsymbol{A}=(x_1^2+x_2-4)\boldsymbol{E}_1+3x_1x_2\boldsymbol{E}_2+(2x_1x_3+x_3^2)\boldsymbol{E}_3$$

中，计算穿过半球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=16$，$x_3\geqslant0$ 的涡通量。

7.4 证明

$$\boldsymbol{A}=(2x_1+x_2)\boldsymbol{E}_1+(4x_2+x_1+2x_3)\boldsymbol{E}_2+(2x_2-6x_3)\boldsymbol{E}_3$$

为调和场，并求它的势函数。

7.5 证明矢量场

$$\boldsymbol{A}=-x_2\boldsymbol{E}_1/(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{4}}+x_1\boldsymbol{E}_2/(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{4}}$$
$$+\boldsymbol{E}_3/(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{4}}$$

满足关系式 $\boldsymbol{A}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$。

习 题 答 案

习题 1 (1.1) $3\vec{a}d$。(1.6) $\frac{\partial h}{\partial x_i}=(a_{ij}+a_{ji})x_j$,

$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}=a_{ij}+a_{ji}$。

习题 2 (2.3) 20。

习题 3 (3.1) $\cos^2(x,x')+\cos^2(x,y')+\cos^2(x,z')=1$, …。 (3.2) $y_{1'}=\sqrt{6}$, $y_{2'}=2\sqrt{2}$, $y_{3'}=\sqrt{3}$。

(3.3) $a_1=1.2948$, $a_2=-0.9652$, $a_3=-3.7937$。

习题 4 (4.1) $\kappa=a(a^2+b^2)$; $\tau=b/(a^2+b^2)$。 (4.3) $\boldsymbol{T}=2\pi a^2\boldsymbol{E}_3$。

习题 5 (5.5) …, $l_{22'}=\sin\varphi\sin\psi\sin\theta+\cos\varphi\cos\psi$, …。

习题 6 (6.4) (c) $\nabla r=\boldsymbol{R}/r$, (e) $\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3$, (f) $\nabla\times\boldsymbol{R}=0$, (g) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{E}_i(a_i+x_j\partial_i a_j)$。(6.5) (c) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=-2\Omega^2$。(6.6) (a) $f(r)=c/r^3$,
(b) $f(r)=c_1/r+c_2$。

习题 7 (7.1) $\Gamma=\frac{1}{2}\pi a^2$, 沿逆时针方向积分。(7.2) 3/2。

(7.3) -16π, 曲面以 $x_1^2+x_2^2+x_3^2>16$ 的一边为法矢正方向。(7.4) $\varphi=x_1^2+2x_2^2-3x_3^4+x_1x_2+2x_2x_3+c$。